Russian Academy of Sciences
Institute of Philosophy

Institute for Logic, Cognitive Science and Development of Personality

PROCEEDINGS OF THE RESEARCH LOGICAL SEMINAR OF INSTITUTE OF PHILOSOPHY, RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES

1993

Moscow 1994

Российская Академия Наук
Институт философии

Общественный институт логики, когнитологии и развития личности

Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН

1993

Москва 1994

ББК 87.4
Т-78

Т78 Труды научно-исследовательского семинара Логического центра Института философии РАН Сборник статей / Редкол.: В.А.Смирнов, П.И.Быстров; Ин-т философии РАН, Общественный ин-т логики, когнитологии и развития личности. - М., 1994. - 112 с.

Статьи сборника написаны на основе докладов, сделанных на семинаре в 1993 году. Главное внимание уделяется семантическому и синтаксическому анализу известных и нестандартных исчислений релевантной и четырехзначной логики, а также сравнению различных формальных реконструкций систем силлогистики. Исследуется исчисление предикатов с универсалиями и предлагается один из возможных методов логической формализации понятий физики.

ISBN 5-201-01857-2

Содержание

Contents

ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот сборник является десятым по счету изданием трудов научно-исследовательского семинара по логике Института философии РАН (руководитель семинара - профессор В.А.Смирнов). В него вошли статьи, написанные на основе докладов, сделанных участниками семинара в 1993 году.

По традиции тематика сборника связана с философскими, "техническими" и прикладными проблемами различных неклассических логик, силлогистики и теории доказательств. В статье В.А.Смирнова дается сравнительный анализ систем силлогистики, формализованных на основе различных допущений содержательного характера, и сформулирован ряд теорем о дефиницальной эквивалентности этих систем. Доказательства этих теорем не приводятся и предоставлены читателю.

В данном сборнике завершена публикация серии статей В.А.Бочарова, посвященных построению исчисления предикатов первого порядка с универсалиями - автором приводится философское обоснование формулировки этой логической системы.

Три статьи посвящены релевантной логике, причем в трех ее основных аспектах: семантическом, теоретико-доказательственном и прикладном. В статье Е.А.Сидоренко построена оригинальная семантика с "двумирными" точками референции для известных исчислений E и NR. Нестандартное релевантное исчисление с отмеченными формулами, для которого верна теорема об устранении сечения, построено в статье П.И.Быстрова. Вьетнамским логиком Фам Дин Нгьемом предлагается описание релевантной семантики расширенных программ.

Логика с неклассическим оператором ложности подробно исследуется и сравнивается с различными многозначными исчислениями в работе С.А.Павлова.

Статьи сборника носят поисковый характер, содержат новые результаты, а также постановки оригинальных проблем, и ориентированы на специалистов в области логики.

В.А.Смирнов

ДЕФИНИЦИАЛЬНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СИСТЕМ СИЛЛОГИСТИКИ

За последнее десятилетие отечественными логиками была проведена большая и плодотворная работа по исследованию различных систем силлогистики и их отношению к логике предикатов, алгебре классов, онтологии Лесневского. Я имею в виду работы В. А. Бочарова, В. И. Маркина, Л. И. Мчедлишвили, О. Ф. Серебрянникова, Б. И. Федорова, свои собственные и ряда других исследователей. Итоги исследований были подведены в книгах В. А. Бочарова и В. И. Маркина. В. И. Маркин аксиоматизировал различные системы силлогистики (фундаментальную, больцановскую, керроловскую) и доказал их рекурсивную эквивалентность системе C2. Я хочу вернуться к этому вопросу и предложить вместо рекурсивной эквивалентности силлогистичесих теорий рассматривать их дефиницальную эквивалентность. Последнее понятно для более широкого круга читателей. В этой заметке я существенно опираюсь на книгу В.И.Маркина.

Силлогистика есть теория рассуждений на языке категорических суждений. Она рассматривает рассуждения, в которых посылки и заключение формулируются в форме категорических суждений. Обычно рассматривается четыре типа категоричесих суждений:

общцутвердительное - все S суть P
общеотрицательное - ни одно S не есть P
частноутвердительное - некоторые S есть P
частноотрицательное - некоторые S не есть P

В истории логики предлагали различные истолкования этих суждений. Сейчас мы имеем возможность эти различные истолкования зафиксировать в виде перевода на язык исчисления предикатов или алгебру классов. Мы примем следующий подход: будем использовать различные символы для записи суждений при различном их истолковании.

Общеутвердительное суждение истолковывалось двояко. При первом истолковании предполагалось, что утверждается непустота субьекта. При этом истолковании мы будем записывать общеутвердительное суждение как ASP, а его перевод - $\exists xSx\&\forall x(Sx\supset Px)$. При втором истолковании (в фундаментальной силлогистике) не предполагается, что утверждается непустота субьекта. При этом истолковании общеутвердительное суждение запишем SaP, а его перевод - $\forall x(Sx \supset Px)$. Общеотрицательное суждение, если оно не предполагает непустоту субьекта, будем записывать ESP, а его перевод - $\forall x(Sx \supset \neg Px)$. Если предполагать, что утверждается непустота субьекта (в больцановской силлогистике), то будем писать SeP, а его перевод - $\exists xSx \& \forall x(Sx \supset \neg Px)$.

Частноутвердительное суждение во всех рассматриваемых нами системах истолковывается одинаково - как утверждающее непустоту субьекта, его мы будем записывать как ISP, и его первод - $\exists x(Sx \& Px)$.

Наконец, частноотрицательное суждение интерпретируется двояко. В предложенной мною системе (оккамовской) частноотрицательное суждение не предполагает непустоту субьекта, мы будем его записывать как OSP, и его перевод - $\neg \exists xSx \vee \exists x(Sx \& \neg Px)$. В фундаментальной, больцановской и керроловской силлогистиках частноотрицательное суждение понимается как утверждающее непустоту субьекта, и мы будем его записывать как SoP, а его перевод - $\exists x(Sx \& \neg Px)$.

Мы включим в рассмотрение систему силлогистики, идейно восходящую к Н. А. Васильеву и аксиоматизированную мною [2]. В ней имеется общеутвердительное (ASP), общеотрицательное (ESP) и особое частное утверждение "Только некоторые S суть P", его мы будем записывать как TSP, и его перевод - $\exists x(Sx \& Px) \& \exists x(Sx \& \neg Px)$.

Теперь сформулируем различные системы в разных терминах.

Система С2

Формулируется в терминах A,E,I,O и основывается на принципе: утвердительные суждения предполагают непустоту субьекта, отрицательные - нет.

Аксиоматика (В. А. Смирнов)

1. $ASM \& AMP \supset ASP$
2. $ASM \& EMP \supset ESP$
3. $ESP \supset EPS$
4. $ASP \supset ISP$
5. $ISP \supset ISS$
6. $ISS \supset ASS$
7. $ESP \equiv \neg ISP$
8. $OSP \equiv \neg ASP$

Мы несколько иначе сформулировали аксиоматику. Аксиому $ISP \supset ASS$ мы разделили на две: пятую и шестую. Пятая аксиома $ISP \supset ISS$ эквивалентна $ESS \supset ESP$, что выражает утверждение, что пустой класс (ESS) включается в любой другой (ESP). Аксиома может быть переформулирована в виде $ESS \vee ASS$, что выражает утверждение, что любой класс либо пуст, либо непуст.

Система силлогистики С2 наиболее близка к аристотелевскому пониманию категорических суждений. В ней имеют место правила логического квадрата, обращения (чистого и с ограничением), все модусы силлогистики. Но в ней недоказуемы формулы ASS и ISS. Они фактуальны и утверждают непустоту термина S. В терминах С2 могут быть определены все другие, введеные выше, типы категорических суждений, а именно

$$SaP \equiv ASP \vee \neg ISS$$

$$SeP \equiv ISS \& ESP$$

$$SoP \equiv ISS \& OSP$$

$$TSP \equiv ISP \& OSP$$

Фундаментальная силлогистика FC (Лейбниц, Брентано, Гильберт-Аккерман и другие)

Формулируется в терминах A,I,e,o. Основной принцип: общие суждения не утверждают непустоту субьекта, истину утверждают.

Аксиоматика (В. И. Маркин)

1. $SaM \& AMP \supset ASP$
2. $SaM \& EMP \supset ESP$
3. $ESP \supset EPS$
4. SaS
5. $ISP \supset ISS$
6. $SoP \supset ISS$
7. $ESP \equiv \neg ISP$
8. $SoP \equiv \neg ASP$

При таком понимании категорических суждений нарушаются правила логического квадрата: нельзя переходить от общего к частному, не действует принцип, что контрарные суждения (А и Е) не могут быть вместе истинными, и принцип, что субконтрарные суждения подчиняются закону исключенного третьего ($ISP \vee SoP$). Неправомерно обращение с ограничением (неверно: $SoP \supset ISP$). Неверны все аристотелевские модусы, в мнемоническое название которых входит буква p.

Но в терминах фундаментальной силлогистики могут быть определены все остальные, а именно

$$ASP \equiv SaP \& ISS$$

$$OSP \equiv \neg ISS \vee SoS$$

$$SeP \equiv ISS \& ESP$$

$$TSP \equiv ISP \& SoP$$

Теорема. C2 *дефинициально эквивалентна* FC, *т.е.* $C2 + SaP \equiv ASP \vee \neg ISS + SoP \equiv ISS \& OSP$ *эквивалентна* $FC + ASP \equiv SaP \& ISS + OSP \equiv ISS \vee SoP$

Доказательство. Упражняйтесь.

Система BC (больцановская силлогистика)

В качестве основных принимаются A,I,e,o. Основной принцип: все категорические суждения, как утвердительные так и отрицательные, утверждают неполноту субьекта.

Аксиоматика (В.И.Маркин)

1. $ASM \& AMP \supset ASP$
2. $ASM \& MeP \supset SeP$
3. $ISP \supset IPS$
4. $ASP \supset ISP$
5. $ISP \supset ISS$
6. $ISS \supset ASS$
7. $SeP \equiv \neg ISP \& \neg ISS$
8. $SoP \equiv \neg ASP \& \neg ISS$

В этой аксиоматике (как и для C2) я расщепил аксиому $ISP \supset ASS$ на две: 5 и 6. В системе Больцано, естественно, как и в C2, не доказуемы законы силлогистического тождества ASS и ISS. В ней неверен закон исключенного третьего для логического квадрата ($ASP \vee SoP$, $SeP \vee ISP$, $ISP \vee SoP$). В связи с этим данная трактовка привлекала к себе внимание ряда исследователей по основаниям математики (см.Бернайс). Все ли модусы проходят?

В этой системе мы можем определить другие операторы:

$$ESP \equiv SeP \vee \neg ISS$$

$$OSP \equiv SoP \vee \neg ISS$$

$$ISP \equiv ISP \& SoP$$

$$SaP \equiv ASP \vee \neg ISS$$

Теорема. BC *дефинициально эквивалентна* C2, *т.е.*
$BC + ESP \equiv SeP \vee \neg ISS + OSP \equiv SoP \vee \neg ISS$
эквивалентна
$FC + SeP \equiv ISS \& ESP + SoP \equiv ISS \& OSP$
Доказательство. Упражняйтесь.

Теорема. BC *дефинициально эквивалентна* FC, *т.е.*
$BC + SaP \equiv ASP \vee \neg ISS + ESP \equiv SeP \vee \neg ISS$
эквивалентна
$FC + ASP \equiv SaP \& ISS + SeP \equiv ISS \& ESP$
Доказательство. Упражняйтесь.

Система КС (Керроловская силлогистика)

В качестве основных принимаются A,E,I,o. Система близка к C2. Надо отметить, что Керрол часто избегает частноотрицательных суждений.

Аксиоматика (В. И. Маркин)

1. $ASM \& AMP \supset ASP$
2. $ASM \& EMP \supset ESP$
3. $ESP \supset EPS$
4. $ASP \supset ISP$
5. $ISP \supset ISS$
6. $ISS \supset ASS$
7. $ESP \equiv \neg ISP$
8. $SoP \equiv \neg ASP \& ISS$

В этой системе нет законов тождества ASS и ISS, неверен переход от E к o. Не действует закон исключенного третьего для ($ASP \vee SoP$, $ISP \vee SoP$). Какие модусы не проходят?

В КС мы можем ввести другие операторы

$$OSP \equiv SoP \vee \neg ISS$$

$$SaP \equiv ASP \vee \neg ISS$$

$$SeP \equiv ISS \& ESP$$

$$TSP \equiv ISP \& SoP$$

Имеют место теоремы о дефиницитальной эквивалентности КС и систем С2, FC, ВС, то есть

(1) $KC + OSP \equiv SoP \vee \neg ISS$ *эквивалентна* $C2 + SoP \equiv OSP \& ISS$

(2) $KC + SaP \equiv ASP \vee \neg ISS$ *эквивалентна* $FC + ASP \equiv SaP \& ISS$

(3) $KC + SeP \equiv ISS \& ESP$ *эквивалентна* $BC + ESP \equiv SeP \vee \neg ISS$

Система C2V

В качестве основных принимаются операторы А, Е, Т. Это не основная система логики Н. А. Васильева. Она была сформулирована лишь для анализа первоначальных идей Н. А. Васильева, сформулированных в статье " О треугольнике противоположностей ".

Аксиоматика (В. А. Смирнов)

1. $ASM \& AMP \supset ASP$
2. $ASM \& EMP \supset ESP$
3. $ESP \supset EPS$
4. $\neg(ASP \& ESP)$
5. $\neg(ASP \& TSP)$
6. $\neg(ESP \& TSP)$
7. $ASP \vee ESP \vee TSP$
8. $ESP \vee ASS$

Мы могли бы расщепить аксиому 8 на две 8.1. $ESS \supset ESP$ и 8.2. $ESS \vee ASS$. Для этой системы ни о каком квадрате противоположностей говорить не приходится. Но действует очень изящный треугольник противоположностей. А, Е и Т образуют базис, то есть попарно несовместимы и верна их дизъюнкция.

В терминах C2V могут быть определены другие операторы

$$ISP \equiv ASP \vee TSP$$

$$OSP \equiv ESP \vee TSP$$

$$SaP \equiv ASP \vee ESS$$

$$SeP \equiv ESP \& \neg ESS$$

$$SoP \equiv ESP \& \neg ESS \vee TSP \& \neg ESS$$

Система C2V дефинициально эквивалентна всем другим системам: C2, FC, BC, KC.

Система C2 была расширена до системы, дефинициально эквивалентной булевой алгебре классов. Аксиоматика была предложена В. А. Бочаровым. Я видоизменил аксиоматику, чтобы не изменять основных аксиом базисной системы C2. Очевидно, что все пять систем, могут быть расширены до систем, дефинициально эквивалентных булевой алгебре классов. Собственно булева алгебра классов возникла как продолжение фундаментальной силлогистики. Но она могла бы быть развита и на другой основе - аристотелевской (C2) или больцановской (BC).

Очевидно, что система Лукасевича и эквивалентная ей система C4, не могут естественным образом быть расширены до булевой алгебры классов. (Система С2Д+ISS противоречива).

Я хочу поставить несколько проблем.

(1) Система C1 не погружается в исчисление предикатов и булеву алгебру классов (Л. И. Мчедлишвили). Но возникает вопрос, каким алгебраическим системам эквивалентна силлогистика, которая получается из полной аксиоматизации С2Д отбрасыванием аксиомы $ISP \supset ASS$.

(2) Целесообразно исследовать вопрос о возможности или невозможности погружения в исчисление предикатов двух систем $C1+ISP \supset ISS$ $(ESS \supset ESP)$ и $C1+ISS \supset ASS$ $(ESS \vee ASS)$

(3) Соответственно рассмотреть вопрос о системе, которая получится из С2Д заменой $ISP \supset ASS$ на $ISP \supset ISS$ и $ISS \supset ASS$. Какие алгебраические системы им соответствуют?

$C1+ISP \supset ISS$ есть сформулированная мною система CVA. (Силлогистика Н. А. Васильева при акцидентальной трактовке категорических суждений; C2V - соответствует системе при дистрибутивной трактовке TSP).

Литература

1. *Смирнов В. А.* Адекватный перевод утверждений силлогистики в исчислении предикатов. // Актуальные проблемы логики и методологии науки. Киев, 1980.

2. *Смирнов В. А.* Логические методы анализа научного знания., М., Наука, 1987.

3. *Бочаров В. А.* Аристотель и традиционная логика. М., 1987.

4. *Маркин В.И.* Силлогистические теории современной логики. М., 1991.

5. *Васильев Н.А.* Воображаемая логика. Избранные труды. М., 1989.

С.А.Павлов

ЛОГИКА ЛОЖНОСТИ FL4

Логика ложности FL4 позволяет корректно оперировать, в дополнение к двузначным высказываниям, с противоречивыми высказываниями и с высказываниями, которые не являются ни истинными, ни ложными. Для FL4 имеются теоремы непротиворечивости, полноты и дедукции.

В рамках FL4 определяются логические связки, истинностные таблицы для которых можно поставить в определенное соответствие с таблицами для связок 4-значных логики Белнапа и логики истины фон Вригта, 3-значных логик Клини, Лукасевича, Бочвара, интуиционистской логики Гейтинга, паранепротиворечивых логик Приста, Асеньо-Тамбурино, Сугихары, Сетте, формализованной Аррудой логики Васильева, с операциями алгебры Да Косты.

Введение

Следующие содержательные положения являются исходными для логики ложности FL4 [10], отличающейся лишь более лаконичной формулировкой от логики ML4 [11].

1. Понятие ложности будем рассматривать и употреблять только в высказываниях вида:

'Предложение 'S' ложно.' (символически $(-S)$), в которых имена предложений образованы с помощью кавычковой функции.

Высказывание $(-S)$ является высказыванием о ложности предложения S и является высказыванием в метаязыке относительно языка, в котором сформулировано предложение S. Множество высказываний языка, метаязыка, метаметаязыка рассматривается как одно целое, то есть с высказываниями S, $(-S)$, $(-(-S))$ будем оперировать совместно в языке FL4.

2. Понятие ложности будем рассматривать как исходное, неопределяемое понятие, которое в формальной системе будет играть роль логического оператора.

Высказывание об истинности предложения S будем рассматривать как сокращение для высказывания о ложности отрицания предложения S и записывать так

'Предложение 'S' истинно.' (символически $(\mid S)$),

3. Высказывание $(-S)$ о ложности предложения S двузначно и подчиняется законам классической логики Cl, в то время как не всякое предложение S должно быть либо истинным, либо ложным. Последнее означает, что в множество предложений, подлежащих оценке на истинность или ложность, включаются предложения, которые могут оцениваться как истинные и ложные одновременно, а также предложения, которые являются ни истинными, ни ложными.

4. Истинность и ложность предложений с импликацией будем задавать традиционно. Пусть
формула '$(S_1 \to S_2)$' символизирует предложение "если S_1, то S_2". Тогда предложение '$(S_1 \to S_2)$' истинно,

если и только если 'S_1' ложно или 'S_2' истинно,

и предложение '$(S_1 \to S_2)$' ложно,

если и только если 'S_1' истинно и 'S_2' ложно.

1. Язык исчисления FL4

Алфавит FL4

$s, s_1, s_2, \ldots$	сентенциальные переменные,
$-$, $\to$	логические константы,
(,)	технические символы.

Определения

D1.1.1 Всякая пропозициональная переменная есть п.п.ф.

1.1.2. Если A , B есть п.п.ф., то $(-A)$, $(A \to B)$ есть п.п.ф.

Пусть A, B, ... есть метапеременные для п.п.ф. Принимаем стандартные соглашения относительно опускания скобок.

Введем следующие сокращения для формул.

Для тождественно ложной формулы f(A), играющей роль константы "ложь":

D1.2.1 $$f(A) =_{df} -(-A \to -A).$$

D1.2.2 Для отрицания: $\sim A =_{df} (A \to f(A))$.

Для высказывания об истинности предложения A
('!' содержательно означает 'есть истинно') :

D1.2.3 $$!A =_{df} -\sim A\ .$$

Для высказывания о строгой истинности предложения A:
('$\ulcorner$' содержательно означает 'есть истинно и неложно'.

D1.2.4 $$\ulcorner A =_{df} -(!A \to -A).$$

Определим импликацию $\supset$, которую назовем D - импликацией

D1.2.5 $$(A \supset B) =_{df} (\ulcorner A \to \ulcorner B).$$

Выделим подкласс формул, для которых будут иметь место аксиомы и теоремы классической логики Cl, посредством определения в классе п.п.ф. подкласса T.F.-формул (T.F.-ф.)

D 3.1. Если A есть п.п.ф., то $-A$ есть T.F.-формула (сокр. TF-ф).

3.2. Если P_1, P_2 есть T.F.-ф., то $(P_1 \to P_2)$ есть T.F.-ф.

Пусть $P, P_1, P_2, \ldots$ есть метапеременные для T.F.-ф.

D1.4.1 $(P_1 \wedge P_2) =_{df} -(P_1 \supset -P_2)$.

D1.4.2 $(P_1 \vee P_2) =_{df} (-P_1 \supset P_2)$.

D1.4.3 $(P_1 \equiv P_2) =_{df} (P_1 \supset P_2) \wedge (P_2 \supset P_1)$.

Схемы аксиом

A1.1 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_1))$.

A1.2 $(P_1 \supset (P_2 \supset P_3)) \supset ((P_1 \supset P_2) \supset (P_1 \supset P_3))$.

A1.3 $(-P_1 \supset -P_2) \supset (P_2 \supset P_1)$.

A1.4 $|P \equiv P$.

A2.1 $|(A \rightarrow B) \equiv -A \vee |B$.

A2.2 $-(A \rightarrow B) \equiv |A \wedge -B$.

Правило вывода

$$\frac{A,\ (A \supset B)}{B}$$

2. Интерпретация

Значения истинности: T, F, N, B. Выделенное значение - T.

Содержательное истолкование:

T - истинность и неложность, B - истинность и ложность,
F - ложность и неистинность, N - ни истинность, ни ложность.

Таблицы истинности для исходных и определенных выше связок:

A	$-A$
T	F
F	T
B	T
N	F

$\rightarrow$	T	F	B	N
T	T	F	B	N
F	T	T	T	T
B	T	B	B	T
N	T	N	T	N

A	$f(A)$	$\sim A$	$\mid A$	$\ulcorner A$
T	F	F	T	T
F	F	T	F	F
B	F	B	T	F
N	F	N	F	F

$\supset$	T	F	B	N
T	T	F	F	F
F	T	T	T	T
B	T	T	T	T
N	T	T	T	T

Таблицы истинности для связок $\wedge$, $\vee$, $\equiv$ являются таблицами классической логики Cl (A1.1, A1.2, A1.3) со значениями истинности T и F.

Характеристической матрицей для FL4 является матрица $\mathfrak{M}_{FL4}$.

$$\mathfrak{M}_{FL4} = <\{T,F,B,N\},-,\to,\{T\}>$$

Алгебру характеристической матрицы $\mathfrak{M}_{FL4}$ будем называть FA4-алгеброй или алгеброй ложности.

$$FA4 = <\{T,F,B,N\},-,\to>$$

Таблицы истинности для определенных выше связок:

3. Металогические свойства логики FL4

Понятия вывода и семантической общезначимости определяются и обозначаются стандартно ($\vdash$, $\models$), их отрицания ($\nvdash$, $\nvDash$). Вывод из гипотез обозначается следующим образом ($\Gamma \vdash A$). Символ следования в метаязыке по отношению к языку FL4 ($\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$).

T3.1 $\vdash A \Rightarrow\ \models A$ (корректность).

T3.2 FL4 *непротиворечиво*. (Следствие T3.1.)

Теоремы редукции:

T3.3.1 $\vdash \sim P \equiv -P.$

T3.3.2 $\vdash (P_1 \to P_2) \equiv (P_1 \supset P_2)$.

T3.3.3 $\vdash (\ulcorner A \supset \ulcorner B) \equiv (A \supset B)$.

T3.4 $\vdash \ulcorner A \equiv (|A \wedge --A).$

Определим ряд унарных связок.

D3.1 $\neg A =_{df} (-|A \wedge -A).$

('¬' содержательно означает 'есть ложно и неистинно').

D3.2 $\llcorner A =_{df} (|A \wedge -A).$

('⌞' содержательно означает 'есть истинно и ложно').

D3.3 $\lrcorner A =_{df} (-|A \wedge --A).$

('⌟' содержательно означает 'есть ни истинно, ни ложно').
Этим связкам соответствуют следующие истинностные таблицы:

A	$\neg A$	$\llcorner A$	$\lrcorner A$
T	F	F	F
F	T	F	F
B	F	T	F
N	F	F	T

Определим n-местную исключающую дизъюнкцию:

D3.4 $(P_1 \vee^n P_2 \vee^n \dots P_n) =_{df} ((P_1 \wedge -P_2 \wedge \dots -P_n) \vee$

$\vee (-P_1 \wedge P_2 \wedge ... -P_n) \vee ... \vee (-P_1 \wedge -P_2 \wedge ... P_n))$.

Следующую теорему назовем тетралеммой истинности и ложности или законом исключенного пятого.

T3.5: $\vdash (\ulcorner A \vee^4 \urcorner A \vee^4 \llcorner A \vee^4 \lrcorner A)$

Имеем теоремы дедукции, полноты и адекватности (см. также [10]).

T3.6 $\quad \Gamma, A \vdash B \Rightarrow \Gamma \vdash (A \supset B)$

T3.7 $\quad \models A \Rightarrow \vdash A$

T3.8 $\quad \vdash A \Leftrightarrow \models A$

4. Основные связки в FL4

Дальнейшие соотношения между импликациями $\rightarrow$ и $\supset$:

T4.1.1 $\quad \vdash \quad (A \rightarrow B) \supset (A \supset B)$.

T4.1.2 $\quad \nvdash \quad (A \supset B) \supset (A \rightarrow B)$.

Для операторов истинности и ложности $|$ и $-$ имеем следующее соотношение:

T4.2 $\quad \vdash \quad -A \equiv |{\sim}A$,

то есть высказывание о ложности предложения A означает то же что и высказывание об истинности отрицания этого предложения A.

Определим конъюнкцию, дизъюнкцию и импликацию в обе стороны.

D4.1 $\quad (A \,\&\, B) =_{df} {\sim}(A \rightarrow {\sim}B)$.

D4.2 $\quad (A \vee B) =_{df} ({\sim}A \rightarrow B)$.

D4.3 $\quad (A \leftrightarrow B) =_{df} (A \rightarrow B) \,\&\, (B \rightarrow A)$.

Этим связкам соответствуют следующие истинностные таблицы:

&	T	F	B	N
T	T	F	B	N
F	F	F	F	F
B	B	F	B	F
N	N	F	F	N

V	T	F	B	N
T	T	T	T	T
F	T	F	B	N
B	T	B	B	T
N	T	N	T	N

↔	T	F	B	N
T	T	F	B	N
F	F	T	B	N
B	B	B	B	T
N	N	N	T	N

Для связок &, V и $\leftrightarrow$ имеются следующие соотношения редукции:

T4.3.1. $\quad \vdash \quad |(A \,\&\, B) \equiv |A \wedge |B$,

T4.3.2. $\quad \vdash \quad -(A \,\&\, B) \equiv -A \vee -B$,

T4.3.3. $\quad \vdash \quad |(A \vee B) \equiv |A \vee |B$, T4.3.4. $\vdash \quad -(A \vee B) \equiv -A \wedge -B$,

T4.4.1. $\vdash \quad (P_1 \& P_2) \equiv (P_1 \wedge P_2)$,

T4.4.2. $\vdash \quad (P_1 \vee P_2) \equiv (P_1 \vee P_2)$,

T4.4.3 $\vdash \quad (P_1 \leftrightarrow P_2) \equiv (P_1 \equiv P_2)$,

которые показывают, что таблицы истинности для связок & и V являются расширением таблиц для связок $\wedge$, $\vee$ из области {T,F} на универсум {T,F,B,N}.

5. Соотношения FL4 с четырехзначными логиками: Логика истины Вригта T″LM

Среди логик истины, вводимых фон Вригтом в [4, 18], наиболее близкой к FL4 является четырехзначная логика T″LM. Логика истины T″LM погружается в FL4 следующим образом.

Оператору истины T в T″LM соответствует оператор | в FL4.

Отрицанию ~ соответствует ~ (смотри D1.2.2).

Конъюнкции & соответствует & (смотри D4.1).

Тогда аксиомам T″LM соответствуют теоремы FL4, а правилам вывода в T″LM соответствуют производные правила вывода в FL4.

Логику истины T″LM фон Вригт получает, последовательно присоединяя к исходной логике истины, которую он называет "core" системой CS, ряд аксиом. Следующие теоремы FL4 являются аксиомами CS:

T5.1.1 $\vdash \quad \mid A \leftrightarrow \mid {\sim}{\sim}A$, (A1 CS)

T5.1.2 $\vdash \quad \mid (A \& B) \leftrightarrow \mid A \& \mid B$, (A2 CS)

T5.1.3 $\vdash \quad \mid {\sim}(A \& B) \leftrightarrow \mid {\sim}A \vee \mid {\sim}B$. (A3 CS)

К аксиомам CS Вригт добавляет следующую аксиому и называет эту систему в [18] T″L (в [4] эта аксиома для T″L отсутствует).

T5.1.4 $\vdash \quad \mid {\sim} \mid A \leftrightarrow {\sim} \mid A$. (A4 T″L).

К аксиомам T″L Вригт добавляет еще одну аксиому и называет эту систему T″LM.

T5.1.5 $\vdash \quad (\mid A \& {\sim} \mid {\sim}A) \rightarrow A$. (A″6 T″LM)

Производные правила вывода FL4

R5.1 $$\frac{A,\ (A \rightarrow B)}{B}$$ (R2. Detachment CS)

R5.2 $$\frac{A}{(\mid A \& {\sim} \mid {\sim}A)}$$

Следующее правило вывода следует из R5.2:

(R3. Правило Истины. CS) Если A есть доказуемая формула (в системе логики истины), то (|A & ~|~A) есть также доказуемая формула.

Значения истинности для T''LM : 'Истинно и ложно', 'истинно, но не ложно', 'ложно, но не истинно', 'ни истинно, ни ложно', которые обозначаются как '1', '+', '-', '0' соответственно.

Значениям истинности +, -, 1, 0 для T''LM соответствуют T, F, B, N для FL4.

Таблица для & интерпретации T''LM подобна таблицам для & интерпретаций логики FL4 и логики Белнапа.

Таблицам операторов T и ~ для T''LM соответствуют таблицы для | и ~ в логике FL4.
Эти соответствия таблиц позволяют установить изоморфизм алгебры для T''LM алгебре ложности FA4.

4-значная логика Белнапа и логика тавтологических следований E_{fde}

В 4-значной логике Белнапа [2] имеются следующие значения истинности:
T - «говорит только Истину» N - «не говорит ни Истины, ни Лжи»
F - «говорит только Ложь» B - «говорит и Истину и Ложь»

Связки 4-значной логики Белнапа соотносятся со связками в FL4 следующим образом:
Отрицанию логики Белнапа соответствует связка ~ (см. D1.2.2)
Конъюнкции логики Белнапа соответствует связка & (см. D4.1)
Дизъюнкции логики Белнапа соответствует связка V (см. D4.2)

Белнап отмечает необходимость отличать знак «говорит только Истину» от знака «по меньшей мере говорит Истину». В FL4 это отличие в оценках предложений выражается употреблением двух различных операторов ⌐ и | соответственно.

Белнап формулирует следующие интуитивные условия для оценки конъюнкции :

"Отметить (A & B) как «по меньшей мере Ложь» только в случае, когда по меньшей мере одно из предложений A и B отмечено как «по меньшей мере Ложь».

Отметить (A & B) как «по меньшей мере Истина» только в случае, когда оба предложения отмечены как «по меньшей мере Истина».", которым отвечают в FL4 следующие теоремы:

T5.2.1. $\vdash$ $|(A \& B) \equiv |A \& |B$,

T5.2.2. $\vdash$ $-(A \& B) \equiv -A \vee -B$.

и условия для оценки дизъюнкций:

"Отметить $(A \vee B)$ как «по меньшей мере Истина» только в случае, когда по меньшей мере одно из предложений A и B отмечено как «по меньшей мере Истина».

Отметить $(A \vee B)$ как «по меньшей мере Ложь» только в случае, когда оба предложения отмечены как «по меньшей мере Ложь»." , которым в FL4 отвечают следующие теоремы:
Эти условия полностью определяют дизъюнкцию."

T5.2.3. $\vdash \quad |(A \vee B) \equiv |A \vee |B,$

T5.2.4. $\vdash \quad -(A \vee B) \equiv -A \,\&\, -B.$

Белнап говорит, что A *влечет* B, если этот вывод никогда не приводит нас от «Истины» к ее отсутствию (т.е. сохраняет истинность), а также никогда не приводит нас от отсутствия «Лжи» к «Лжи» (т.е. сохраняет не-ложность).

Определим[1] соответствующую этим требованиям импликацию логики Белнапа $\mapsto$.

D5.1 $(A \mapsto B) =_{df} ((|A \to |B) \quad \& \, (--A \to --B))$

Этой связке соответствует следующая истинностная таблица:

$\mapsto$	T	F	B	N
T	T	F	F	F
F	T	T	T	T
B	T	F	T	F
N	T	F	F	T

Истинностная таблица для $\mapsto$ подобна таблице, предложенной Т.Смайли для логики тавтологических следований E_{fde}.

Пусть связками, соответствующими связкам логики тавтологических следований E_{fde} будут $\sim$, $\&$, $\vee$, $\mapsto$, определенные выше в D1.2.2., D4.1, D4.2, D5.1. Тогда имеем теорему.

T5.3. *Если* A *есть теорема* E_{fde}, *то* A *есть теорема* FL4.

$$\vdash_{E_{fde}} A \Rightarrow \vdash A$$

Характеристическая матрица для E_{fde} есть

$$\mathfrak{M}_{E_{fde}} = \langle \{T,F,B,N\}, \sim, \&, \vee, \mapsto, \{T\} \rangle,$$

истинностные таблицы для связок которой заданы выше.

Мускенс в [13] рассматривает четырехзначные логики и вводит следующие истинностные значения: 'истинно и неложно', 'ложно и неистинно', 'ни истинно, ни ложно' и 'истинно и ложно'. Следуя Белнапу он обозначает эти значения как T, F, N и B.

---

[1]Проф. Белнап согласился с таким определением связки $\mapsto$.

6. Анализ логической матрицы

Теорема о подалгебрах

T6.1 *Для алгебры ложности* FA4 *существует только три подалгебры, а именно:* $FA2 = <\{T,F\},-,\to>$,

$FA3B = <\{T,F,B\},-,\to>$, $FA3N = <\{T,F,N\},-,\to>$.

Для других подмножеств множества $\{T,F,B,N\}$ операции алгебры FA4 являются незамкнутыми.

Пусть $\mathfrak{B}$ есть булева решетка на множестве $B = \{1,0\}$ с отношением порядка $\leq$ и дополнением $\neg$, то есть $\mathfrak{B} = <\{1,0\},\neg,\leq>$.

T6.2 *Алгебра* FA2 *изоморфна булевой решетке* $\mathfrak{B}$.

$<\{T,F\},-,\to>$ *изоморфна* $<\{1,0\},\neg,\leq>$.

FA4-алгебру можно представить, используя булеву решетку $\mathfrak{B}$, следующим образом.

Пусть $M = \{T,F,B,N\}$ есть декартово произведение множества B на B, то есть $M = B \times B$. Тогда элемент m, принадлежащий множеству M , то есть $(m \in M)$, рассматриваем как пару, состоящую из элементов m_1, m_2, принадлежащих множеству B, то есть $(m_1 \in B)$, $(m_2 \in B)$.

Принимаем следующие соотношения

6.1.1 $m = <m_1, m_2>$,

6.1.2 $T = <1,1>$, $F = <0,0>$, $B = <1,0>$, $N = <0,1>$,

6.1.3 $T = 1$, $F = 0$.

Операции задаем покомпонентно следующим образом:

6.2.1 $-m = <\neg m_2, \neg m_2>$

6.2.2 $(m \to w) = <(m_2 \leq w_1), (m_1 \leq w_2)>$

7. Эквивалентности и закон тождества

Определим эквивалентность, которую назовем D-эквивалентностью.

D7.1. $(A \supset\subset B) =_{df} (A \supset B) \wedge (B \supset A)$.

Определим эквивалентность, которую назовем 4-эквивалентностью.

D7.2. $(A \equiv^4 B) =_{df} (A \mapsto B) \wedge (B \mapsto A)$.

Этим связкам соответствуют следующие истинностные таблицы:

$\equiv^4$	T	F	B	N
T	T	F	F	F
F	F	T	F	F
B	F	F	T	F
N	F	F	F	T

$\supset\subset$	T	F	B	N
T	T	F	F	F
F	F	T	T	T
B	F	T	T	T
N	F	T	T	T

T7.1.1 $(A \equiv^4 B) \equiv (\ulcorner A \wedge \ulcorner B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \vee (\llcorner A \wedge \llcorner B) \vee (\lrcorner A \wedge \lrcorner B)$

T7.1.2 $(A \mapsto B) \equiv (A \equiv^4 (A \,\&\, B))$

Для выше определенных эквивалентностей имеем следующие положения, выражающие закон тождества или нарушение закона тождества:

T7.2.1 $\nvdash \quad (A \leftrightarrow A)$.

T7.2.2 $\vdash \quad (A \equiv^4 A)$.

T7.2.3 $\vdash \quad (A \supset\subset A)$.

Следующие теоремы и метатеоремы показывают различия между введенными эквивалентностями

T7.3.1 $\vdash \quad (A \to B) \supset (A \mapsto B)$.

T7.3.2 $\nvdash \quad (A \mapsto B) \supset (A \to B)$.

T7.3.3 $\vdash \quad (A \mapsto B) \supset (A \supset B)$.

T7.3.4 $\nvdash \quad (A \supset B) \supset (A \mapsto B)$.

Теорема подстановочности имеет место только для 4-эквивалентности.

T7.4. *Если п.п.ф.* B *получается из п.п.ф.* A *подстановкой п.п.ф.* N *вместо всех или некоторых вхождений п.п.ф.* M *в п.п.ф.* A, то

если $\vdash (M \equiv^4 N)$, *то* $\vdash (A \equiv^4 B)$.

Сравнивая дедуктивные свойства эквивалентностей, будем использовать вместо эквивалентностей соответствующие им импликации.

T7.5.1 $\vdash (A \to B) \Rightarrow (A \vdash B)$.

T7.5.2 *Не имеет места, что* $(A \vdash B) \Rightarrow \vdash (A \to B)$.

T7.5.3 $\vdash (A \mapsto B) \Rightarrow (A \vdash B)$.

T7.5.4 *Не имеет места, что* $(A \vdash B) \Rightarrow \vdash (A \mapsto B)$.

T7.5.5 $\vdash (A \supset B) \Leftrightarrow (A \vdash B)$.

8. Классификация формул с одной переменной

Рассмотрим схемы формул, в которых имеются вхождения только одной метапеременной для п.п.ф., которые будем далее называть 1-формулами.

Имеет смысл классифицировать 1-формулы, разбив множество этих формул на классы эквивалентности. Для 4-эквивалентности и D-эквивалентности имеют место следующие метатеоремы.

T8.1.1 *Для* 1-*формул имеется* 36 *классов* 4-*эквивалентности.*

T8.1.2 *Для* 1-*формул имеется* 16 *классов* D-*эквивалентности.*

Так как в 1-формулы входит только одна метапеременная, имеет смысл представлять их как формулы, построенные из унарного оператора и метапеременной.

Рассматривая таблицы истинности унарных операторов FL4 как продолжение таблиц истинности унарных операторов классической логики на область {B,N}, проведем классификацию унарных операторов FL4.

Унарные операторы, таблицы истинности которых являются всевозможными продолжениями таблицы истинности некоторого унарного оператора классической логики, включим в один класс. Таких классов имеем четыре, которые будем называть: класс

1) тавтологий, 2) противоречий, 3) отрицаний, 4) утверждений.

Отрицание

Представим таблицы истинности для ряда различных операторов отрицания в FL4.

$(\sim A \,\&\, -A)$	$(\sim A \,\&\, -\!\mid\! A)$	$(\sim A \vee -A)$	$-\!\mid\! A$	$(\sim A \vee -\!\mid\! A)$	$\neg\ulcorner A$
F	F	F	F	F	F
T	T	T	T	T	T
B	F	T	F	B	T
F	N	N	T	T	T

Закон двойного отрицания

Для различных видов отрицания имеем несколько формулировок, выражающих закон двойного отрицания или его нарушение.

T8.2.1 $\vdash$ $(A \equiv^4 \sim\sim A)$.

T8.2.2 $\vdash$ $(A \supset\subset \sim\sim A)$.

T8.2.3 $\nvdash$ $(A \equiv^4 --A)$.

Используя для всех видов отрицаний обобщенный метасимвол n, имеем следующие схемы теорем.

T8.3 $\vdash$ $(nA \equiv^4 nnnA)$.

T8.4 $\vdash$ $(A \supset nnA)$.

T8.5.1 $\nvdash$ $(--A \supset A)$.

T8.5.2 $\nvdash$ $(\neg\neg A \supset A)$.

Утверждение

Ряд унарных операторов из класса операторов утверждения представим своими таблицами истинности.

$\ulcorner A$	$\sim\sim A$	$\mid A$	$--A$	$\neg\neg A$
T	T	T	T	T
F	F	F	F	F
F	B	T	F	T
F	N	F	T	T

Такие операторы утверждения как $\mid$, $\ulcorner$, $--$, $\neg\neg$ в общем случае изменяют валентность предложения A, на которое они действуют. Поэтому ни один из них не может быть исключен из рассмотрения, в отличие от классической логики, в которой результат действия оператора утверждения на предложение P эквивалентен предложению P. Так, в частности, для операторов $\mid$ и $\ulcorner$ имеем теоремы.

T8.6.1 $\nvdash \quad (\mid A \equiv^4 A)$.

T8.6.2 $\nvdash \quad (\mid A \supset\subset A)$.

T8.6.3 $\nvdash \quad (\ulcorner A \equiv^4 A)$.

T8.7 $\vdash \quad (\ulcorner A \supset\subset A)$.

Противоречие

Ряд унарных операторов из класса операторов противоречия представим своими таблицами истинности.

$(\ulcorner A \wedge \neg A)$	$(A \,\&\, \sim A)$	$(\mid A \wedge -A)$	$(--A \wedge -\mid A)$	$(\neg\neg A \wedge \neg\ulcorner A)$
F	F	F	F	F
F	F	F	F	F
F	B	T	F	T
F	N	F	T	T

Закон противоречия

Имеем следующие положения, выражающие закон противоречия или его нарушение.

Для следующей пары операторов утверждения и отрицания имеет место закон противоречия

T8.8 $\vdash \quad \neg(\ulcorner A \wedge \neg A)$.

Для ряда других пар операторов закон противоречия не имеет места, в частности:

T8.9.1 $\nvdash \quad \sim(A \,\&\, \sim A)$.

T8.9.2 $\nvdash \quad -(\mid A \wedge -A)$.

Принцип: из противоречия следует что угодно, имеет место в следующих случаях:

T8.10.1 $\vdash (\ulcorner A \wedge \neg A) \supset B$

T8.10.2 $\vdash (A \,\&\, {\sim}A) \supset B$

Этот принцип: из противоречия следует что угодно, не соблюдается для других пар операторов, что позволяет использовать эти операторы для анализа и построения релевантных и паранепротиворечивых логик.

T8.11.1 $\nvdash (|A \wedge -A) \supset B$

T8.11.2 $\nvdash (--A \wedge -|A) \supset B$

T8.11.3 $\nvdash (\neg\neg A \wedge \neg\ulcorner A) \supset B$

Тавтологии

Ряд унарных операторов из класса операторов тавтологий представим своими таблицами истинности.

$(\ulcorner A \vee \neg A)$	$(A \vee {\sim}A)$	$(\mid A \vee -A)$	$(--A \vee -\mid A)$	$(\neg\neg A \vee \neg\ulcorner A)$
T	T	T	T	T
T	T	T	T	T
F	B	T	F	T
F	N	F	T	T

Закон исключенного третьего

Некоторые тавтологии можно рассматривать как выражение закона исключенного третьего.

Формулы $(|A \vee -A)$ и $(|A \vee^2 -A)$ можно рассматривать как выражение закона бивалентности.

Имеем следующие положения, выражающие закон исключенного третьего или его нарушение.

Для пары операторов утверждения и отрицания ($\neg\neg$, $\neg\ulcorner$) имеет место закон исключенного третьего.

T8.12 $\vdash (\neg\neg A \vee \neg\ulcorner A)$

Для оператора $\neg$ имеет место интуиционистский по форме вариант закона исключенного третьего.

T8.13 $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$

Для ряда других пар операторов закон исключенного третьего не имеет места, в частности:

T8.14.1 $\nvdash (A \vee {\sim}A)$

T8.14.2 $\nvdash (|A \vee -A)$

T8.14.3 $\nvdash$ $(\ulcorner A \vee \neg A)$

Для формул, представляющих собой различные формы закона исключенного третьего, имеются следующие соотношения.

T8.15.1 $\vdash$ $(\ulcorner A \vee \neg A) \equiv (\mid A \vee^2 -A)$

T8.15.2 $\vdash$ $(\mid A \vee^2 -A) \supset (\mid A \vee -A)$

T8.15.3 $\nvdash$ $(\mid A \vee -A) \supset (\mid A \vee^2 -A)$

T8.15.4 $\vdash$ $(A \vee \sim A) \supset (\mid A \vee -A)$

T8.15.5 $\nvdash$ $(\mid A \vee -A) \supset (A \vee \sim A)$

Бивалентные и трехвалентные формулы

Содержательно под бивалентными формулами понимаются 1-формулы, которые принимают значение T или F при любых значениях, которые могут принимать входящие в них переменные. Этому соответствует следующее метаопределение.

D8.1 1-формула A есть бивалентная формула, если и только если для нее имеет место $(\mid A \vee^2 -A)$.

В следующих метатеоремах рассматривается классификация бивалентных формул.

T8.16.1 *Класс бивалентных формул включает* 16 *классов 4-эквивалентности* 1-*формул.*

T8.16.2 *В каждом классе* D-*эквивалентности имеется один подкласс 4-эквивалентности бивалентных формул.*

В определении D8.1 фигурирует формула $(\mid A \vee^2 -A)$, являющаяся биусловием бивалентности.

Имеется еще три класса D-эквивалентных формул, которые могут быть условиями бивалентности.

В классе тавтологий рассмотрим подробнее подкласс D-эквивалентности 1-формул, которые могут служить биусловиями бивалентности. Определим биусловия в каждом из четырех подклассов 4-эквивалентности. Будем обозначать биусловия символами $bv_{ij}(A)$. Смысл индексов усматривается из таблиц истинности для этих формул.

D8.2.1 $bv_{FF}(A) =_{df} (\mid A \vee^2 -A)$.

D8.2.2 $bv_{BN}(A) =_{df} (A \vee \sim A)$.

D8.2.3 $bv_{BF}(A) =_{df} (A \,\&\, \mid A) \vee (\sim A \,\&\, -A)$

D8.2.4 $bv_{FN}(A) =_{df} (A \,\&\, --A) \vee (\sim A \,\&\, -\mid A)$

Метаобозначением для всех биусловий бивалентности пусть будет выражение $bv(A)$.

Этим формулам соответствуют следующие истинностные таблицы:

$(\mathsf{I}A \vee^2 -A)$	$bv_{FN}(A)$	$bv_{BF}(A)$
T	T	T
T	T	T
F	F	B
F	N	F

Содержательно под трехвалентными формулами будем понимать 1-формулы, которые принимают значение T, F, B (или для другого вида трехвалентных формул T, F, N) при любых значениях, которые могут принимать входящие в них переменные.

Определения биусловий трехвалентности аналогичные $bv_{ij}(A)$ введем для двух видов трехвалентных формул.

Биусловия TFBвалентности

D8.3.1 $3Bv_F(A) =_{df} (\mathsf{I}A \vee -A)$.

D8.3.2 $3Bv_N(A) =_{df} (A \vee -A)$.

Метаобозначением для всех биусловий трехвалентности пусть будет выражение 3Cv(A).

Биусловия TFNвалентности

D8.4.1 $3Nv_F(A) =_{df} (--A \vee -\mathsf{I}A)$.

D8.4.2 $3Nv_B(A) =_{df} (A \vee -\mathsf{I}A)$.

Метаобозначением для всех биусловий трехвалентности пусть будет выражение 3Nv(A).

Этим формулам соответствуют следующие истинностные таблицы:

$(A \vee -A)$	$(A \vee -\mathsf{I}A)$
T	T
T	T
T	B
N	T

9. Подсистемы логики FL4

T9.1 *Формулы только из трех классов D-эквивалентных 1-формул, невыводимых в FL4, могут быть непротиворечиво присоединены в качестве аксиом к FL4.*

Формулами, представляющими эти три класса, являются следующие $(\ulcorner A \vee \neg A)$, $(\mathsf{I}A \vee -A)$, $(--A \vee -\mathsf{I}A)$.

D9.1 В результате таких присоединений получаем следующие три логики:

Логику, получаемую присоединением к $FL4$ в качестве аксиомы формулы $(\mathsf{I}A \vee -A)$, назовем FL3B.
Логику, получаемую присоединением к $FL4$ в качестве аксиомы формулы $(--A \vee -\mathsf{I}A)$, назовем FL3N.
Логику, получаемую присоединением к $FL4$ в качестве аксиомы формулы $(\ulcorner A \vee \neg A)$, назовем FL2.

FL2 и классическая логика

T9.2 FL2 *является абсолютно полной логикой, эквивалентной* Cl.

Среди различных 1-формул бивалентные формулы выделяются следующей особенностью. Формулы, являющиеся результатом подстановки бивалентных формул вместо переменных в формулы, являющиеся теоремами Cl, есть теоремы FL4.
Чтобы выразить это свойство бивалентных формул, введем следующие метаопределения Cl(A), FL2(A).

Пусть Cl(A), FL2(A) есть сокращения для конъюнкции всех аксиом классической логики Cl (A1.1-A1.3) или логики FL2 соответственно, в которых имеются всевозможные различные вхождения формулы A вместо одной или нескольких TF-ф.

Используя биусловия бивалентности получаем следующие теоремы и метатеоремы [9].

T9.3 $\vdash \quad bv(A) \supset Cl(A)$.

T9.4 $\vdash \quad bv(A) \supset\subset FL2(A)$.

Имеем некоторые частные случаи этой теоремы

T9.4.1 $\vdash \quad (\mathsf{I}A \vee -A) \wedge -(\mathsf{I}A \wedge -A) \supset\subset FL2(A)$.

T9.4.2 $\vdash \quad (A \vee \sim A) \supset\subset FL2(A)$.

T9.4.3 $\vdash \quad \sim(A \,\&\, \sim A) \supset\subset FL2(A)$.

T9.4.4 $\vdash \quad (A \twoheadrightarrow A) \supset\subset FL2(A)$.

T9.4.5 $\vdash \quad (\mathsf{I}A \Leftrightarrow A) \supset\subset FL2(A)$.

T9.4.6 $\vdash \quad (\mathsf{I}A \equiv^4 A) \supset\subset FL2(A)$.

Пусть F(A) есть п.п.ф., в которую входит п.п.ф. A.

T9.5 $\vdash_{Cl} F(A) \Rightarrow (bv(A) \vdash F(A))$.

T9.6 $(bv(A) \vdash F(A)) \Leftrightarrow \vdash_{FL2} F(A)$.

Логики FL3N, FL3B

Аналогичные соотношения получаем для логик FL3N, FL3B. Метаопределения для FL3B(A), FL3N(A) аналогичны метаопределению FL2(A).
D9.3 . Пусть FL3B(A) есть сокращение для конъюнкции всех аксиом логики FL3B, в которых имеются всевозможные различные

вхождения формулы A вместо одной или нескольких п.п.ф., определенных в FL3B.

Используя биусловия трехвалентности получаем следующие теоремы и метатеоремы.

T9.7 $\vdash$ 3Bv(A) $\supset\subset$ FL3B(A) .

T9.8 (3Bv(A) $\vdash$ F(A)) $\Leftrightarrow$ $\vdash_{FL3B}$ F(A) .

D9.4 Пусть FL3N(A) есть сокращение для конъюнкции всех аксиом логики FL3N, в которых имеются всевозможные различные вхождения формулы A вместо одной или нескольких п.п.ф., определенных в FL3N.

Используя биусловия трехвалентности, получаем следующие теоремы и метатеоремы.

T9.9 $\vdash$ 3Nv(A) $\supset\subset$ FL3N(A) .

T9.10 (3Nv(A) $\vdash$ F(A)) $\Leftrightarrow$ $\vdash_{FL3N}$ F(A) .

10. Определения связок трехзначных логик

В дополнение к основным связкам в языке логики FL4 построим определения нескольких логических связок, истинностные таблицы которых можно поставить в определенное соответствие с таблицами для связок ряда известных логик.

Для того, чтобы сравнивать связки, определяемые в FL4, со связками трехзначных логик, будем отбрасывать одно из значений B или N. Этой процедуре синтаксически соответствует добавление аксиом, задающих логики FL3N или FL3B. Тем самым получаем возможность сравнивать между собой алгебры трехзначных логик с алгебрами FA3N, FA3B. Общей чертой рассматриваемых ниже алгебр является то, что они являются обеднением алгебр FA3N, FA3B.

FA3N

Логика Клини с сильными связками SK3

Клини в [7] строит трехзначную логику, которую будем обозначать SK3, с помощью *регулярных* таблиц для связок ~, &, ∨, →, ≡, вводимых в *сильном смысле*. Клини использует три истинностных значения: t ("истина"), f ("ложь"), u ("не определено"), или в другом его толковании "известна истинность", "известна ложность", "неизвестно, истинно или ложно".

Истинностным значениям и сильным связкам логики Клини соответствуют следующие истинностные значения и связки FL3N. Здесь и далее в таблицах соответствий справа расположены символы истинностных значений и связок FL3N, а слева расположены символы логики, сравниваемой с FL3N.

Логика Клини		**Логика FL3N**
t, f, u	соответствуют	T, F, N

$\bar{}$, &, ∨, →, ≡ соответствуют ~, &, V, →, ↔

Истинностные таблицы для связок FL4 ~, &, V, →, ↔ см. выше.

Нерегулярной таблице для ≅ соответствует таблица для ≡ .[4]

Логика Бочвара В3

Бочвар в [3] строит трехзначную логику, которую будем обозначать В3, с помощью матриц ~, ⊢, ⁊ , он предлагает рассматривать три истинностных значения: R ("истина"), F ("ложь"), S ("бессмыслица"), а также классифицировать связки, различая внешние и внутренние:
внутреннее отрицание ~A ("не-А"),
внутренняя логическая сумма A ∩ B ("А и В"),
внешнее утверждение ⊢A ("А верно"),
внешнее отрицание ⁊A ("А ложно").

R, F, S соответствуют T, F, N .

~, ⊢, ⁊ соответствуют ~, I, − .

Определение для связки ∩ в FL4 следующее

D10.1 $(A \cap B) =_{df} (A \leftrightarrow B) \& (A \vee B)$.

Этим связкам соответствуют следующие истинностные таблицы:

A	~A	⊢A	⁊A
T	F	T	F
F	T	F	T
N	N	F	F

∩	T	F	N
T	T	F	N
F	F	F	N
N	N	N	N

Производные связки определяются следующим образом

D10.2.1 $(A \cup B) =_{df} \sim(\sim A \cap \sim B)$.

D10.2.2 $(A \supset^{B} B) =_{df} \sim(A \cap \sim B)$.

D10.2.3 $(A \supset\subset^{B} B) =_{df} (A \supset^{B} B) \cap (B \supset^{B} A)$.

Логика Клини со слабыми связками WK3

Клини в [7] строит еще одну трехзначную логику с теми же значениями истинности, что и для SK3. Связки в ней предлагается рассматривать в *слабом* смысле. Будем обозначать эту логику WK3. Таблицы для двухместных связок в логике WK3 аналогичны таблицам логики Бочвара.

$\bar{}$, &, ∨, →, ≡ соответствуют ~, ∩, ∪, ⊃ᴮ, ⊃⊂ᴮ

Этим связкам соответствуют следующие истинностные таблицы:

$\vee$	T	F	N
T	T	T	N
F	T	F	N
N	N	N	N

$\to$	T	F	N
T	T	F	N
F	T	T	N
N	N	N	N

Трехзначная логика Лукасевича

Трехзначную логику Лукасевич конструирует, вводя третье значение истинности, которое интерпретируется как «нейтральность» и обозначается 1/2.

1, 0, 1/2 соответствуют T, F, N .

~, &, $\vee$ соответствуют ~, &, V .

Импликация Лукасевича $\to^{Ł}$ определяется в FL4 следующим образом

D10.3. $(A \to^{Ł} B) =_{df} (A \to B) \vee (A \mapsto B)$.

Этой связке соответствует следующая истинностная таблица:

$\to^{Ł}$	T	F	N
T	T	F	N
F	T	T	T
N	T	N	T

Интуиционистская трехзначная логика Гейтинга H3

Трехзначную интуиционистскую логику Гейтинг конструирует, вводя третье значение истинности, которое интерпретируется как «неопределенность» и обозначается 1/2 [16].

1, 0, 1/2 соответствуют T, F, N .

~, &, $\vee$ соответствуют ~, &, V .

Импликация Гейтинга $\to^{H}$ определяется в FL4 следующим образом

D10.4 $(A \to^{H} B) =_{df} (--A \to B) \vee (A \mapsto B)$.

Этой связке соответствует следующая истинностная таблица:

$\to^{H}$	T	F	N
T	T	F	N
F	T	T	T
N	T	F	T

FA3B

Теоремы Т8.9.2, Т811.1 сближают FL4 с паранепротиворечивыми логиками [5].
Будем сравнивать операции алгебр паранепротиворечивых логик с операциями алгебры FA3B.

Логика парадоков Приста

Прист в [15] строит трехзначную логику, используя таблицы истинности для $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, и вводит в качестве третьего истинностного значения «парадоксально», которое обозначается 2 . Принимается два выделенных значения 1, 2.

0, 1, 2	соответствуют	F, T, B
$\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$	соответствуют	$\sim$, &, V, $\rightarrow$

Истинностные таблицы для связок FL4 $\sim$, &, V, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ см. выше.

Логика антиномий Асеньо и Тамбурино

Асеньо и Тамбурино в [12] строят трехзначную логику, которую будем обозначать АТ3, используя таблицы истинности $\sim$, $\wedge$, $\vee$, и вводят в качестве третьего истинностного значения «антиномично» , которое обозначается 2 . Принимается два выделенных значения 1, 2

0, 1, 2	соответствуют	F, T, B
$\sim$, $\wedge$, $\vee$,	соответствуют	$\sim$, &, V,

Импликация Асеньо и Тамбурино $\rightarrow^{A}$ определяется в FL4 следующим образом

D10.5 $$(A \rightarrow^{A} B) =_{df} (|A \rightarrow B).$$

Истинностные таблицы для связок этой и последующих логик смотри в [11].

Логика Сугихары

Сугихара строит трехзначную логику, которую будем обозначать Su3, используя таблицы истинности для связок $\sim$, $\wedge$, $\vee$. Принимается два выделенных значения 1, 2

0, 1, 2	соответствуют	F, T, B .
$\sim$, $\wedge$, $\vee$,	соответствуют	$\sim$, &, V, .

Импликация Сугихары $\rightarrow^{Su}$ определяется в FL4 следующим образом.

D10.6 $$(A \rightarrow^{Su} B) =_{df} (|A \rightarrow B) \,\&\, (A \rightarrow --B).$$

Логика Сетте

Определим связки, соответствующие максимально паранепротиворечивой трехзначной логике Сетте [17] с двумя выделенными значениями.

0, 1, 2 соответствуют F, T, B .

Отрицанию $\sim$ в логике Сетте соответствует оператор $-$.

Определим конъюнкцию, дизъюнкцию и импликацию логики Сетте $\wedge^{Se}$, $\vee^{Se}$, $\to^{Se}$.

D10.7.1 $(A \wedge^{Se} B) =_{df} (\mid A \wedge \mid B)$.

D10.7.2 $(A \vee^{Se} B) =_{df} (\mid A \vee \mid B)$.

D10.7.3 $(A \to^{Se} B) =_{df} (\mid A \to \mid B)$.

Логика Арруды V1

Арруда в [1] строит трехзначную логику V1, для формализации идей Васильева.

Принимаются два выделенных значения 1, 2.

0, 1, 2 соответствуют F, T, B .

$\sim, \wedge, \vee, \supset$ соответствуют $\sim, \wedge^{Se}, \vee^{Se}, \to^{Se}$.

Определим отрицание Васильева $\neg^{V1}A$ в FL4 следующим образом.

D10.6 $\neg^{V1}A =_{df} - \mid A$.

Алгебра да Коста

Для интерпретации паранепротиворечивых логик да Коста предложил трехэлементную алгебру со следующими элементами (0,1,2) и операциями ($'$, $\leq$). Выделенные элементы 1, 2. Порядок для элементов следующий $0 \leq 2 \leq 1$.

$', \wedge, \vee, \leq$ соответствуют $-, \&, V, \mapsto$.

От двух выделенных значений к одному

В интерпретации паранепротиворечивых логик, которые здесь рассматриваются, имеются два выделенных значения. Для логики FL3B принимается одно выделенное значение. Обратим внимание на то, что формула $\mid A$ принимает выделенное значение T для двух значений T и B, которые может принимать п.п.ф. A. Обозначим общезначимые формулы для паранепротиворечивых логик $\models_{Pc}$.

T10.1 $\models_{Pc} A \Rightarrow \models \mid A$

Учитывая семантическую полноту FL3B, имеем теорему.

T10.2 $\models_{Pc} A \Rightarrow \vdash \mid A$

Литература

1. *Арруда А.* Воображаемая логика Васильева // Васильев Н.А. Воображаемая логика. Избранные труды. М., 1989.

2. *Белнап Н.* Как нужно рассуждать компьютеру // Белнап Н., Стил Т. Логика вопросов и ответов, М., 1981.

3. *Бочвар Д.А.* Об одном трехзначном исчислении //Математический сборник. 1938. Т.4. N2.
4. *Вригт Г.Х.* Логика истины. // Вригт Г.Х. Логико-философские исследования. М., 1986.
5. *Ишмуратов Т.А., Карпенко А.С., Попов В.М.* О паранепротиворечивой логике // Синтаксические и семантические исследования неэкстенсиональных логик. М., 1989.
6. *Карпенко А.С.* Максимально паранепротиворечивая логика и дважды р-алгебра // Неклассические логики и их применения: Труды научно-исследовательского семинара по логике Института философии АН СССР. М.,1988.
7. *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М.,1957.
8. *Павлов С.А.* Исчисление предикатов истинности и ложности. // Логический анализ естественных языков: 2-ой Советско - Финский коллоквиум по логике. М., 1979.
9. *Павлов С.А.* Некоторые условия двузначности в исчислении предикатов истинности и ложности // Системные методы анализа научного знания. М.,1986.
10. *Павлов С.А.* Логика ложности // X Всесоюзная конференции по логике, методологии и философии науки. Тезисы. (секции 1-5). Минск, 1990.
11. *Павлов С.А.* Логика с терминами 'истинно' и 'ложно' //Философские основания неклассических логик: Труды научно-исследовательского семинара по логике Института философии АН СССР. М., 1990.
12. *Asenjo F.G., Tamburino J.* Logic of antinomies // Notre Dame J. Form. Log. 1975. Vol. 16. N1.
13. *Muskens R.A.* Meaning and partiality. Amsterdam, 1989.
14. *Pawlow S.A.* Einige nichttraditionelle Ideen in der Logik // Philosophie und Naturwissenschaften in Vergangenheit und Gegenwart. Heft 5: Philosophishe Probleme der Logik. Berlin, 1978.
15. *Priest G.* The logic of paradox. J.Philos. Logic // 1979. Vol.8. N2.
16. *Prior A.N.* Formal logic. Oxford, 1955.
17. *Sette A.M.* On propositional calculus P3 // Math. Jap. 1973. Vol. 18.
18. *von Wright G.H.* Truth-Logics // Logique et analyse. 1987. Vol. 120.

П.И.Быстров

РЕЛЕВАНТНЫЕ ЛОГИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ КАК СИСТЕМЫ ВЫВОДОВ С ИНДЕКСИРОВАННЫМИ ФОРМУЛАМИ[1]

На вопрос, что такое логика в смысле логической системы, или логического исчисления, существует традиционный ответ "в стиле Тарского". Логикой называется множество правильно построенных в специальном языке синтаксических объектов (формул), замкнутое относительно операции логического следования. Конкретные свойства этой операции фиксируются в виде точно сформулированных условий или правил. Для такой трактовки логической системы характерна высокая степень общности - логикой может считаться множество формул, не содержащее ни одной общезначимой формулы, равно как и множество всех общезначимых и только общезначимых фомул, что имеет свои преимущества, особенно в семантическом плане. Однако определение логики как множества формул никак не проясняет ее дедуктивные свойства. В данном случае вне поля зрения остаются, например, такие существенные, на мой взгляд, вопросы, как: "Что такое логический вывод в том или ином исчислении? Как может быть получена формула (даже если уже откуда-либо известно, что она принадлежит данной логике)? Можно ли данную формулу логически вывести различными путями, если нет, то почему, а если да, то какому из выводов и в силу каких причин следует отдать предпочтение? И т.п."

В данной работе реализуется несколько иной подход к понятию логической системы, согласно которому логическая система, или исчисление представляет собой множество (систему) синтаксических объектов (выводов), построенных в сответствии с определенными требованиями, или правилами. Каждый такой объект может быть представлен в виде пары (D,α), где D есть вывод, а α - выводимое выражение (в частностном случае - секвенция или формула). При этом используется стандартный язык пропозициональной ло-

---

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 93-06-10708.

гики с константами ⊃ (импликация), ∨ (дизъюнкция), & (конъюнкция), ¬(отрицание) и обычное понятие правильно построенной формулы. Дополнительные языковые средства имеют в некотором смысле технический характер и их применение мотивировано только необходимостью строго различать такие понятия как "формула" и "вхождение формулы в секвенцию ", а также понятия "секвенция" и "вхождение секвенции в вывод".

Исчисление GRI.

При формулировке секвенциального исчисления GRI используются следующие обозначения, понятия и определения. Заглавными буквами латинского алфавита A, B, C,... обозначаются любые правильно построенные формулы в обычном смысле.

Определение 1.

(1) Любое отличное от нуля натуральное число или упорядоченная пара таких чисел есть индекс.

(2) Любая упорядоченная пара индексов есть индекс.

(3) Ничто иное, кроме указанного в пунктах (1) и (2) данного определения, не является индексом.

В символической записи индексов применяются угловые скобки аналогично тому, как обычные скобки применяются в стандартной записи сложных формул; члены пар разделяются точкой с запятой, и в целях сокращения записи угловые скобки опускаются в тех случаях, когда это не препятствует однозначному прочтению индекса. Например, если k, m, n - натуральные числа, то любое из следующих выражений является индексом: (a) n (b) m;n (c) m;m (d) k;<m;n> (e) <n;n>;k (f) <m;n>;<k;n> (g) <<<n;n>;k>;m>;<k;m>. Здесь во всех случаях опущены внешние угловые скобки, а в некоторых случаях - внешние и частично внутренние, то есть мы пишем n вместо <n>, m;n вместо <<m>;<n>>, <m;n>;<k;n> вместо <<m;n>;<k;n>> и т. д. В любом случае анализ структуры индекса однозначен. Например, в случае (g) индексом является пара, правым членом которой является пара натуральных чисел, а левым членом - пара вида <<n;n>;k>;m, которая, в свою очередь, состоит из натурального числа m и пары <n;n>;k.

В дальнейшем буквы u, v и w обозначают произвольные индексы.

Определение 2 (S-формулы).

(1) Если A есть формула, то выражение A/w есть S-формула.

(2) Если A/u, и B/w суть S-формулы, то $\neg A/u$, $\neg B/w$., $(A\&B)/u;w$, $(A\vee B)/u;w$ и $(A\supset B)/u;w$ суть S-формулы.

(3) Ничто иное, кроме указанного в пунктах (1) и (2) данного определения не является S-формулой.

Например, выражения вида $\neg A/u\supset B$ и $A\supset(B\supset A/v;w)$ (где $\neg A/u$ и $(B\supset A)/v;w$ суть S-формулы) в целом не являются S-формулами.

I-секвенция есть выражение вида $\Gamma, \Delta \rightarrow \Theta, Z$, где Γ, Δ, Θ и Z обозначают конечные (возможно, пустые) последовательности S-формул.

Если $\Gamma \rightarrow \Theta$ есть I-секвенция, то любой элемент Γ называется *антецедентным членом*, а любой элемент Θ - *сукцедентным членом* этой I-секвенции. При этом считается, что в I-секвенции не может быть двух одинаковых в смысле графического совпадения антецедентных (сукцедентных) членов. Например, при наличии в Γ (или Θ) более одного члена вида A/w выражение $\Gamma \rightarrow \Theta$ не является правильно построенной I-секвенцией. Очевидно, что в результате удаления всех индексов из всех членов некоторой I-секвенции получается обычная генценовская секвенция. В дальнейшем для краткости вместо "I-секвенция" будем писать просто "секвенция".

Контрарной парой секвенции S называется любая пара, состоящая из антецедентного и сукцедентного членов S, графически совпадающих между собой.

Стандартные понятия "основная секвенция", "дерево секвенций", "применение правила заключения", "главная формула (боковая формула) данного применения правила заключения" предполагаются известными и используются без существенных изменений. Например, следующая схема является схемой правила заключения

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta, A/u \quad \Gamma \rightarrow \Theta, B/w}{\Gamma \rightarrow \Theta, A\&B/u;w}$$

Пусть данная схема является частью некоторого дерева секвенций Σ, построенного с помощью различных правил заключения. В этом случае любой элемент Σ, представляющий собой вхождение в Σ некоторой секвенции S, назовем *D-секвенцией* (или *D-членом*), а любой член данной D-секвенции S назовем *DS-формулой* (или *DS-членом*). Ясно, что любой DS-член будет либо антецедентным, либо сукцедентным. Любой входящий в Г (Θ) антецедентный (сукцедентный) DS-член C/v D-секвенции, являющейся заключением данного правила, называется *параметрическим потомком* соответствующих входящих в Г (Θ) антецедентных (сукцедентных) DS-членов C/v D-секвенций, являющихся левой и правой посылками. Соответственно, любой входящий в Г (Θ) антецедентный (сукцедентный) DS-член B/u D-секвенции, являющейся левой (правой) посылокой, называется *параметрическим предком* соответствующего входящего в Г (Θ) антецедентного (сукцедентного) DS-члена B/u D-секвенции, являющейся заключением данного правила. Боковые DS-формулы A/u и B/w называются *логическими предками* главной DS-формулы A&B/u;w, а сама эта DS-формула называется *логическим потомком* DS-формул A/u и B/w. В любом дереве D-секвенций отношение "быть параметрическим (логическим) предком (потомком)" иррефлексивно и транзитивно.

При построении деревьев D-секвенций используются следующие средства.

Основная секвенция: $A/{-n} \rightarrow A/{+n}$.

Логические правила заключения:

$$\frac{A/u,\ \Gamma \rightarrow \Theta,\ B/v}{\Gamma \rightarrow \Theta,\ A \supset B/u;v}\ (R1)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Theta,\ A/u \qquad B/v,\ \Delta \rightarrow Z}{A \supset B/u;v,\ \Gamma,\ \Delta \rightarrow \Theta,\ Z}\ (R2)$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A/u \quad \Gamma \to \Theta, B/v}{\Gamma \to \Theta, A\&B/u;v} \ (R3)$$

$$\frac{A/u, \Gamma \to \Theta}{A\&B/u, \Gamma \to \Theta} \ (R4)$$

$$\frac{B/u, \Gamma \to \Theta}{A\&B/u, \Gamma \to \Theta} \ (R5)$$

$$\frac{A/u, \Gamma \to \Theta \quad B/v, \Gamma \to \Theta}{A \vee B/u;v, \Gamma \to \Theta} \ (R6)$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A/u}{\Gamma \to \Theta, A \vee B/u} \ (R7)$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, B/u}{\Gamma \to \Theta, A \vee B/u} \ (R8)$$

$$\frac{A/u, \Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, \neg A/u} \ (R9)$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A/u}{\neg A/u, \Gamma \to \Theta} \ (R10)$$

Структурные правила заключения:

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A/u, B/v, Z}{\Gamma \to \Theta, B/v, A/u, Z} \ (R11)$$

$$\frac{\Gamma, A/u, B/v, \Delta \to \Theta}{\Gamma, B/v, A/u, \Delta \to \Theta} \text{ (R12)}$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A/u, A/v}{\Gamma \to \Theta, A/u} \text{ (R13)}$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta, A/u, A/v}{\Gamma \to \Theta, A/v} \text{ (R14)}$$

$$\frac{A/u, A/v\ \Gamma \to \Theta}{A/u, \Gamma \to \Theta} \text{ (R15)}$$

$$\frac{A/u, A/v\ \Gamma \to \Theta}{A/v, \Gamma \to \Theta} \text{ (R16)}$$

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{\Gamma \to \Theta, A/u} \text{ (R17),}$$

где u отличается от всех индексов, приписанных сукцедентным членам секвенции заключения;

$$\frac{\Gamma \to \Theta}{A/u, \Gamma \to \Theta} \text{ (R18),}$$

где u отличается от всех индексов, приписанных антецедентным членам секвенции заключения;

$$\frac{\Gamma \to \Theta, C/u \quad C/v, \Delta \to Z}{\Delta, \Gamma \to \Theta, Z} \text{ (R19)}$$

Для краткости изложения везде в дальнейшем будем использовать A_i, B_j, A_k, B_k,...(где i, j, k - целые положительные числа) для обозначения DS-формул, а S_i, S_j,... - для обозначения D-секвенций. Как обычно, деревом D-секвенций (кратко: *D-деревом*) будем называть такую конструкцию, построенную из основных секвенций (возможно, одной основной секвенции) с помощью правил заключения (R1)-(R19), которая заканчивается единственной D-секвенцией, называемой конечной секвенцией данного D-дерева.

Систему, заданную основной секвенцией и правилами (R1)-(R19), обозначим GCI. Очевидно, что, удаляя из формулировки GCI все индексы, а также пару правил сокращения (либо (R13) и (R15), либо (R14) и (R16)), которые становятся излишними, мы получим в точности генценовский секвенциальный вариант классической пропозициональной логики. Применяя стандартный генценовский метод, нетрудно показать, что для GCI имеет место теорема об устранении сечения и это исчисление является разрешимым.

Исчисление GRI можно получить из GCI, с помощью ограничений на применения некоторых правил заключения. Для точной формулировки таких ограничений введем следующее важное определение.

Определение 4. Пусть Σ есть D-дерево, а S есть конечная D-секвенция Σ. Путь в Σ от члена A_j секвенции S к члену C_j секвенции S есть наименьшая последовательность DS-формул B_1,..., B_k такая, что B_1 графически совпадает с A_j, B_k графически совпадает с C_j, и для любого Bi ($1 \leq i \leq k$) выполняется один из следующих пунктов:

(1) B_i есть параметрический предок B_{i+1}, либо B_i есть параметрический потомок B_{i+1};

(2) B_i и B_{i+1} являются членами одной и той же контрарной пары;

(3) B_i является главной, а B_{i+1} - боковой формулой одного и того же применения правила заключения в Σ, или же B_i является боковой, а B_{i+1} - главной формулой одного и того же применения правила вывода в Σ;

(4) Bi является левой (правой), а B_{i+1} - правой (левой) формулой одного и того же применения правила сечения в Σ.

Если для некоторого пути выполняется пункт (2) данного определения, то будем говорить, что этот *путь содержит контрарную пару* или *проходит через контрарную пару*.

Любой член B_i ($1 \leq i \leq k$) некоторого удовлетворяющего данному определению пути называется *отрицательной составляющей* этого пути, если B_i является антецедентным DS-членом, и *положительной составляющей* - если B_i является сукцедентным DS-членом.

В формулировке условий применения правил заключения в целях сокращения вместо фразы "в D-дереве, конечной секвенцией которого является посылка данного правила," будем писать просто: "в выводе посылки".

Условия применения правил заключения:

(R1) - применение правила корректно, если и только если в выводе посылки (1) есть путь от A/u к B/u; (2) есть путь от каждого графически совпадающего с A/u антецедентного DS-члена A_i к B/u; (3) есть путь от каждого графически совпадающего с B/u сукцедентного DS-члена B_j к любому графичски совпадающему с A/u антецедентному DS-члену A_i; (4) каждый из путей, упомянутых в предшествующих пунктах (1)-(3), содержит по крайней мере одну контрарную пару; (5) в каждом из путей, упомянутых в пункте (2), ни одна отрицательная составляющая C_{i+1} не является параметрическим потомком составляющей C_i, а в каждом из путей, упомянутых в пункте (3), ни одна положительная составляющая C_{j+1} не является параметрическим потомком составляющей C_j.

(R2) - применение правила корректно, если и только если в вывыводе левой посылки имеются (1.1) путь от каждого антецедентного DS-члена, графически совпадающего с одним из антецедентных членов этой посылки, к A/u; (1.2) путь от A/u к каждому антецедентному DS-члену, графически совпадающему с одним из антецедентных членов данной посылки; в выводе правой посылки имеются (2.1) путь от каждого графически совпадающего с B/v антецедентного DS-члена Bi по крайней мере к одному сукцедентному члену этой посылки; (2.2) путь от любого DS-члена, графически совпадающего с одним из сукцедентных членов этой посылки к B/v; (3.1) ни одна отрицательная составляющая C_{i+1} путей, упомянутых в пунктах (1.1) и (1.2), не является параметрическим потомком составляющей C_i, и любой из этих путей содержит контрарную пару; (3.2) ни одна положительная составляющая C_{j+1} любого из путей, упомянутых в пунктах (2.1) и (2.2), не является параметрическим потомком сотавляющей C_j, и каждый из этих путей содержит контрарную пару.

(R9) - применение правила корректно, если и только если для посылки выполняются пункты (1.1), (1.2), в формулировке которых "A/u" заменено на "¬A/u", и пункт (3.1) условия для (R2).

(R10)- применение правила корректно, если и только если для посылки выполняются пункты (2.1), (2.2), в формулировке которых "B/v" заменено на "¬A/u", а "B_i" - на "A_i", и пункт (3.2) условия для (R2).

(R19) применение правила корректно, если и только если: для левой посылки выполняются пункты (1.1), (1.2), в формулировке которых "A/v" заменено на "C/u", для правой посылки выполняются пункты (2.1), (2.2), в формулировках которых "B/v" заменено на "C/v", а "B_i" - на "C_k", а для левой и правой посылок выполняются соответственно пункты (3.1) и (3.2) условия для (R2).

Примечание. При определении путей в D-деревьях обе боковые формулы некоторого применения правила сокращения считаются параметрическими предками главной формулы данного применения правила. Ясно, что формула сечения не имеет параметрических потомков, а члены основной секвенции и главная фомула утончения не имеют параметрических предков. В формулировках условий применения правил (R2), (R9), (R10) и (R19) любой из составляющих их пунктов выполняется тривиально, если последовательность S-формул (Г, Θ,...), о членах которой в данном пункте идет речь, является пустой.

GRI-вывод секвенции S есть построенное с помощью правил (R1)-(R19) D-дерево Σ, вершинами которого являются основные секвенции, конечной секвенцией является S, и каждое применение правила в Σ удовлетворяет соответствующему условию (если таковое имеется). Секвенция S называется выводимой в GRI, если и только если предъявлен GRI-вывод, конечной секвенцией которого является S.

Утверждение (об устранимости сечения). Если секвенция S выводима в GRI, то можно построить GRI-вывод этой секвенции, не содержащий применений сечения.

Доказательство этого утверждения отличается от известного доказательства теоремы Генцена тем, что устраняется непосредственно правило сечения без предварительной замены его смешением или каким-либо другим правилом. Подробное рассмотрение доказательства выходит за рамки данной статьи.

Характерной особенностью GRI является то, что формульные образы выводимых в нем объектов, то есть D-секвенций, отличаются от формульных образов обычных секвенций в классическом варианте. При определении формульного образа рассматриваются не I-секвенции как таковые, а пары $(\Sigma;S)$, где Σ есть GRI-вывод, а S есть конечная секвенция этого вывода.

Определение формульного образа D-секвенции. Формульный образ $\varphi(\Sigma;S)$ D-секвенции S есть формула, построенная согласно одному из следующих пунктов:

1) $\varphi(\Sigma;\ \Gamma \rightarrow\ )$ есть $\neg(A_1\&...\&A_n)$, где $A_1,..., A_n$ суть члены Γ без индексов;

2) $\varphi(\Sigma;\ \rightarrow \Theta)$ есть $B_1 \vee ... \vee B_m$, где $B_1,..., B_m$ суть члены Θ без индексов;

3) $\varphi(\Sigma;\ \Gamma \rightarrow \Theta)$ есть состоящая из всех членов Γ и Θ без индексов формула α, которая строится следующим образом:

3.1) если в Γ имеется по крайней мере один член A/u, а в Θ - по крайней мере один член B/v, такие, что для них и вывода Σ выполняются пункты 1-5 из формулировки условия применения правила (R1), то α есть $(A_1\& ...\&A_n)\supset(B_1 \vee ... \vee B_m)$;

3.2) если не выполняется условие, указанное в предыдущем пункте (3.1), то α есть $\neg(A_1\&...\&A_n) \vee B_1 \vee ... \vee B_m$.

Используя данное определение, нетрудно убедиться, что GRI является релевантным исчислением с полным набором логических связок и устранимым правилом сечения. Действительно, в GRI не доказуемы секвенции, формульными образами которых являются такие формулы как $(A\supset B)\supset A)\supset A$, $A\supset(B\supset A)$, $(\neg A \vee B)\supset(A\supset B)$, $B\supset(A\supset A)$ и другие, относимые обычно к "нерелевантным". Например, секвенция $A/2 \rightarrow (A\supset A)/-1;+1$ доказуема в GRI, но ее формульным образом является не "минговая аксиома" $A\supset(A\supset A)$, а формула $\neg A \vee (A\supset A)$, выводимая в любой достаточно богатой релевантной системе.

Вопрос о дедуктивной эквивалентности GRI какой-либо известной аксиоматической релевантной системе в этой работе не рассматривается.

В.А.Бочаров

ИСЧИСЛЕНИЕ ПРЕДИКАТОВ С УНИВЕРСАЛИЯМИ (III. ФИЛОСОФСКИЕ ОСНОВАНИЯ)

Данная работа завершает серию статей, посвященных исследованию субьектно-предикатного исчисления SP= (см.[1],[2]).

В основе SP= лежит фундаментальная идея о введении трех сфер бытия: актуального (существующего реально), потенциального (возможного) и невозможного бытия. С нашей точки зрения, существует несколько веских причин, обосновывающих подобную позицию. Рассмотрим их более внимательно.

Во-первых, хорошо известно, что процесс познания реального мира не может быть замкнут рамками этой реальности. Напротив, в ходе изучения актуально сущего мы вынуждены так или иначе вводить в рассмотрение гипотетические обьекты, обьекты идеальной и абстрактной природы, гипостазы. Примерами таких обьектов могут быть числа, геометрические фигуры, множества, а также различного рода идеализации: идеальный газ, абсолютно черное тело, инерциальная система и т.д. Сюда же можно отнести и те обьекты, которые подобно флогистону, эфиру, теплороду в течении длительного периода времени фигурировали в научных теориях, выполняя важные обьяснительные функции, но затем были отброшены как псевдообьекты.

Во-вторых, выходя за рамки науки и вступая в область более широкой человеческой деятельности по осмыслению реального бытия, мы обнаруживаем и такие образования, как, например, литературные персонажи, мифологические существа, обьекты религиозных верований - ангелы, боги, духи, демоны и т.д.

В связи с таким широким использованием для целей теоретического и практического характера, экзистенциальный характер современной классической логики кажется чрезмерным и слишком жестким. Поэтому построение теории квантификации, в которой мы могли бы более свободно оперировать пустыми терминами, есть насущный вопрос самой практики.

Одним из центральных философских вопросов при построении таких систем является, несомненно, вопрос об онтологическом статусе указанных псевдообьектов. Требуется ответить на вопрос, возможно ли хоть в каком-то смысле допустить существование несуществующих обьектов. Традиционный ответ, базирующийся на четком и ясном тезисе элейской философии "Бытие есть - небытия нет", негативен.

С этой точки зрения допустимо признать существование имени "Пегас", представления о Пегасе, образа Пегаса, понятия "Пегас", концепта, связанного с именем "Пегас", соответствующего ментального образования, но никак не самого по себе Пегаса. Тем не менее, уже в самом этом утверждении содержится определенная трудность. Ведь как только мы истинно сказали "Пегас не существует", мы тем самым решительно отличили данный псевдообьект и от его имени, и от его представления, ментального (или чувственного) образа, от его понятия, т.е. от всего, что, в отличие от Пегаса, как раз реально существует. И дело здесь вовсе не в том, что речь должна идти о разных видах существования: в одном случае о существовании обьективном (обьектном), а в другом - о существовании субьективном. Причина заключается в том, что наш язык устроен таким образом, что любое утверждение требует референциального отнесения наших утверждений к чему-то внешнему, что стоит за понятием, чувственным образом, именем. Действительно, мы можем создать (нафантазировать) образ крылатого коня, однако, когда утверждается "Пегас -крылатый конь", свойство быть крылатым конем нельзя отнести к образу крылатого коня, ибо заведомо ясно, что любой образ, в силу своей природы, не может быть крылатым конем. Точно так же конем не может быть ни имя, ни понятие, ни концепт имени. Утверждать нечто подобное было бы несообразно. Иначе говоря, крылатым конем может быть лишь обьект, являющийся референтом имени"Пегас".

Эта потребность и даже необходимость в переходе от образа крылатого коня к тому обьекту, который является крылатым конем, особенно наглядно проявляется при построении свободных логик, где мы специально вводим в семантику псевдообьекты для того, чтобы иметь возможность указывать на референты пустых имен. К этому нас принуждает то обстоятельство, что вне рамок корреспондентской концепции истины в принципе невозможно хоть какое-либо понимание утверждений и их семантический анализ. Введение псевдообьектов достигает главной цели - сохранить (пусть в несколько трансформированном виде) классическое отношение референции между языком и реальностью. Конечно, при этом мы неизбежно расширяем понятие реальности и вынуждены вводить новые ее типы.

Наиболее развернутую концепцию обоснования расширительного толкования реальности дал А.Мейнонг. Последний в [3] (см. также [4]) пытался обьяснить явную истинность одних и ложность других утверждений о несуществующих обьектах в зависимости от природы самих этих обьектов. Он различал несколько видов бытия. Наряду с бытием конкретных предметов, А.Мейнонг допускал в качестве существующих такие предметы, как "золотая гора", "крылатый конь", "Гамлет". Кроме того, согласно А.Мейнонгу, в качестве обьектов должны быть допущены и такие, как "круглый квадрат". Статус рассмотрения всех этих обьектов понимается им как внешний, безразличный по отношению к бытию и небытию.

Обращаясь тепрь к SP= следует отметить, что данная система, по нашему мнению, представляет собой в определенной степени формализацию в первопорядковом варианте семантических идей Мейнонга. Как и Мейнонг, мы не отрицаем наличие референтов даже у противоречивых имен. Иначе говоря, мы принимаем самую широкую концепциию предмета, полагая, что любое первопорядковое имя, которое может быть образовано в языке, обязательно нечто обозначает. Таким образом, интерпретация SP= предполагает наличие трех сфер бытия - актуального, возможно и невозможного. Что касается актуального бытия, то мы еще скажем об этом ниже, потенциальное же бытие - это область V, невозможное бытие - это область U-V. При этом множество U обязательно непустго. Гарантом его непустоты является то, что U - это область интерпретации некоторого языка, в котором строятся имена. Последние же (повторим это еще раз) обязательно нечто обозначают даже в том случае, когда это "нечто" не существует актуально. Введение данной области позволяет, по крайней мере чисто теоретически, в полном обьеме перенести на исчисление SP= обычную классическую референциальную интерпретацию.

Действительно, в классической логике принимается принцип, в соответствие с которым каждый термин должен нечто обозначать в универсуме. Считается, что этому принципу не удовлетворяют такие имена, как, например, "Пегас", "Зевс", "флогистон", "эфир", "Андрей

Болконский" и т.д. Тем не менее мы достаточно часто высказываем заведомо истинные предложения, в состав которых входят указанные пустые термины: "Андрей Болконский - герой романа Л.Н.Толстого", "Зевс - глава олимпийских богов", "Инерциальная система - это система, не находящаяся под воздействием каких-либо внешних сил" и т.д. Более того, мы рассуждаем о соответствующих обьектах, и при этом наши рассуждения строятся на обычных законах классической логики. Чтобы это стало возможным, необходимо истолковать данные выражения как значащие, и полагать, например, что значением термина "Пегас" и "Зевс" являются мифологические существа, значением для "флогистона" и "эфира" - обьекты ложных научных концепций, для "идеального газа" и "инерциальной системы" - идеальные обьекты, а для "Андрея Болконского" - литературный персонаж.

Зададимся теперь вопросом, что мы, собственно, делаем, когда квалифицируем обьекты подобным образом. По нашему мнению, внутренний смысл подобной процедуры как раз и состоит во введении некоторого сорта возможных или невозможных обьектов. В самом деле, что такое мифологические существа, литературные или религиозные персонажи. Если это нереальные обьекты, в чем сомнений нет, то это могут быть только либо возможные, либо невозможные обьекты. Но раз универсум образован таким образом, что все эти псевдообьекты в нем содержатся, то мы можем (по крайней мере чисто теоретически) воспользоваться как бы классической процедурой установления истинности атомарных предложений относительно данной расширительно понятой реальности.

С обьективной точки зрения, класс, скажем, крылатых коней пуст и потому никакого Пегаса, как элемента данного класса, быть не может. С другой стороны, хотя класс реальных коней и непуст, среди его элементов тоже нет Пегаса. Отсюда следует, что, соотнося предложение "Пегас - конь" с обьективной реальностью и применяя классическую концепцию истины, мы вынуждены заявить, что данное предложение ложно. Совершенно иначе обстоит дело в случае, когда в качестве универсума берется класс мифологических существ; т.е. универсум составлен из возможных обьектов некоторой разновидности. Теперь термин "Пегас" имеет значение в этой реальности и класс крылатых коней оказывается непустым. Но тогда, если мы действуем без нарушений законов логики и в соответствии со все той же корреспондентской концепцией истины, мы вынуждены будем считать предложение "Пегас - конь" истинным.

В самом деле, класс крылатых коней должен по законам логики включаться в класс коней. При обычной экзистенциальной трактовке множеств это происходит в силу пустоты множества крылатых коней, если же последнее множество не пусто (оно содержит мифологические существа), то тем самым просто класс коней расширяется за счет включения в его состав мифологических существ типа Пегаса. Таким образом, мы пришли к высказанной Д. Д. Льюисом идее о том, что с каждым предикатным термином необходимо связывать две экстенсиональные характеристики - обьем термина и его охват. Под обьемом термина понимается совокупность реально существующих обьектов, обозначаемых им, а под охватом - множество предметов, которые могут без противоречия мыслиться как подпадающие под данный термин.

Такая постановка вопроса связана с еще одним немаловажным аргументом в пользу допущения в универсум возможных и даже невозможных обьектов, т.е. в пользу допущения того, что любое правильно образованное первопорядковое имя нечто обозначает. Без такого допущения имеет место некоторая незавершенность современной теории понятия. Чисто экзистенциальная трактовка обьемов понятий приводит к тому, что, например, обьемы понятий "бог" и "олимпийский бог" совпадают, так как оба являются пустыми. В то же время, сравнивая их содержание, информативности, естественно считать, что второе понятие более информативно, чем первое. Итак, экзистенциальное равенство обьемов этих понятий плохо согласуется с их явным информативным несовпадением, что прямо ведет к нарушению закона обратного отношения между обьемом и содержанием понятий. Чтобы спасти данный закон необходимо, следуя Е. К. Войшвилло (см.[5]), различать логический и фактический обьемы понятий. Под фактическим обьемом должно пониматься множество реально существующих обьектов. Под логическим обьемом следует понимать некоторое множество возможных обьектов или, иначе говоря, то, что Д.Льюис обозначал как охват понятия.

Остановимся теперь на вопросе о сфере актуального бытия в семантике SP=. Обычно свободные логики строятся таким образом, что в качестве одного из обязательных примитивных предикатов принимается одноместный предикат существования, обозначаемый символом E. Желая при этом не отходить слишком далеко от здравого смысла, эмпиризма и номинализма, авторы этих систем принимают тот логический постулат, который фиксируется знаменитым картезианским тезисом "cogito ergo sum". Если вычленить чисто логическую сторону дела, то данный постулат, можно выразить формулой $P(a)\supset E(a)$, т.е. некоторому обьекту предицируется существование при условии, что ему вообще истинно предицируется некоторое свойство.

Принятие данного принципа лежит в русле классической (аристотелевской) трактовки истины как соответствия наших утверждений обьективной реальности. Указанное соглосование имеет глубокий внутренний смысл. Действительно, мы хорошо представляем, что значит быть истинным предложением, когда речь идет о некотором сущем предмете, так как представляем себе возможные способы проверки истинности таких утверждений.

В то же время совершенно непонятно, каким образом можно проверять наличие атрибутов у несуществующих объектов. Это обстоятельство и создает в среде логиков тот психологичический климат, когда принятие принципа Декарта становится чуть ли не единственной парадигмой.

Наличие указанного принципа несет информацию о характере допустимых способов предицирования. Истинная позитивная предикация разрешается в этом случае лишь для актуально сущих объектов. Поэтому расширение универсума возможными объектами и допущение истинной предикации относительно них, должно привести прежде всего к отрицанию принципа Декарта. Именно так и присходит в SP=, где утверждение $P(a)\supset E(a)$ перестает быть законом системы. Более того, расширение универсума возможными объектами приводит к тому, что предикат существования из числа логических предикатов переходит в разряд обычных примитивных предикатов, т.е. по своим логическим свойствам он перестает отличаться чем-либо от других примитивных предикатов. Это находит в SP= свое оправдание в том факте, что предикат существования полностью характеризуется в точности теми же принципами дедукции, что и любой другой примитивный предикат. Поэтому, хотя SP= мы описали без явного задания предиката существования, он, тем не менее, может считаться присутствующим неявно. Чтобы его задать явно, достаточно положить, например, что произвольный предитивный предикат (одноместный) как раз и является предикатом существования.

Для прояснения сути дела зададим соответствующие определения. Для этого потребуется дополнить семантику пунктами:
(I6) I (E) непустое подмножество V,
(Y10) $|E(t)|f=u \leftrightharpoons f(t) \in I(E)$,
а так же указать, что принципы st1 и st2 выполняются и в том случае, когда P - это предикат существования.

Наличие в SP= предиката существования позволяет присоединить к системе квантор существования, определив его следующим образом:

$$Д3\ \exists[\alpha A]B[\alpha A] \leftrightharpoons H[\alpha A](B(\alpha A)\&E(\alpha A))$$

Это сразу же дает возможность получить в SP= следующие теоремы:
T66. $E(\alpha A) \supset A(\alpha A)$ - в силу st2.
E67. $H[\alpha A]E(\alpha A) \equiv \exists[\alpha U]A(\alpha U)$

1. $H[\alpha A]E(\alpha A)$ - посылка
2. $E(\alpha A)$ - Hu,I,αA - огр.
3. $E(\alpha A) \supset A(\alpha A)$ - E66
4. $A(\alpha A)$ - m.p., 3, 2
5. $A(\alpha A)\&E(\alpha A)$ - &в, 4, 2
6. $U(\alpha A)$ - T17
7. $H[\alpha u](\alpha A=\alpha U)$ - =в,6
8. $\alpha A=\alpha U$ - Hu,7,αU - огр.
9. $A(\alpha U)\&E(\alpha U))$ - =u, 8, 5
10. $H[\alpha U](A(\alpha U)\&E(\alpha U))$ - Hв, 9
11. $\exists[\alpha U]A(\alpha U)$ - Д3, 10

12. $H[\alpha A]E(\alpha A) \supset \exists[\alpha U]A(\alpha U)$ - $\supset$в, 11

1. $\exists[\alpha U]A(\alpha A)$ - посылка.
2. $H[\alpha U](A\alpha U)\&E(\alpha U))$ Д3, 1
3. $A(\alpha U)\&E(\alpha U)$ - Hu, 2, αU - огр.
4. $H[\alpha A]E(\alpha A)$ - T13 из 3

5. $\exists[\alpha U]E(\alpha A)\supset H[\alpha A]E(\alpha A)$ - $\supset$в, 4

T68. $E(\tau\alpha A)\equiv\exists[\alpha A](s=\alpha A)$, где s - абсолютно ограниченная универсальная константа

T69. $\exists[\alpha A]B(\alpha A)\supset\exists[\beta B]A(\beta B)$

T70. $\neg E(\alpha(B\&\neg B))$ - в силу теоремы T39

T71. $\neg E(\alpha\neg E)$ - частный случай T44

T72. $H[\alpha A]E(\alpha A)\equiv\exists[\alpha E]A(\alpha A)$

T73. $E(\alpha A)\equiv\exists[\beta U](\beta U=\alpha A)$

T74. $\exists[\alpha A]B(\alpha A)\equiv\exists[\beta U](A\beta U)\&B(\beta U))$

T75. $\exists[\alpha A]B(\alpha A)\supset H[\alpha A]B(\alpha A)$

T76. $(B(\beta A)\&E(\beta\alpha A))\supset\exists[\alpha A](s=\alpha A\&B(s))$, где s - абсолютно ограниченная универсальная константа

T77. $\exists[\alpha\neg A](\alpha\neg A=t)\supset\neg\exists[\alpha A](\alpha A=t)$

T78. $(t=\tau\alpha A\&E(\tau\alpha A))\supset A(t)$

T79. $E(\tau\alpha A(\alpha))\equiv E(\tau\alpha(A(\alpha)\&E(\alpha)))$

1. $E(\tau\alpha A(\alpha))$ - посылка
2. $\neg E(\tau\alpha(A(\alpha)\&E(\alpha))$ - посылка
3. $\neg\exists[\alpha U](A(\alpha U)\&E(\alpha U))$ - из 2 по T67
4. $\neg H[\alpha U](A(\alpha U)\&E(\alpha U))$ - Д3, 3
5. $\forall[\alpha U]\neg(A(\alpha U)\&E(\alpha U))$ - де Морган, 4
6. $U(\tau\alpha A(\alpha))$ - T17
7. $A(\tau\alpha A(\alpha))$ - из 1 по T66
8. $A(\tau\alpha A(\alpha))\&E(\tau\alpha A(\alpha))$ - &в, 7, 1
9. $\neg(A(\tau\alpha A(\alpha))\&E(\tau\alpha A(\alpha))$ - из 5 и 6 по AS
10. Противоречие 9, 8

В другую сторону доказательство ведется так:

1. $E(\tau\alpha(A(\alpha)\&E(\alpha)))$ - посылка
2. $\neg E(\tau\alpha A(\alpha))$ - посылка
3. $A(\tau\alpha(A(\alpha)\&E(\alpha)))\&E(\tau\alpha(A(\alpha)\&E(\alpha)))$ - из 1 по st2
4. $\neg H[\alpha U]A(\alpha U)$ - из 2 по T67
5. $\neg H[\alpha U](A(\alpha U)\&E(\alpha U))$ - Д3, 4
6. $\forall[\alpha U]\neg(A\alpha U)E(\alpha U))$ - де Морган, 5
7. $U(\tau(A(\alpha)\&E(\alpha)))$ - T17
8. $\neg(A(\tau\alpha(A(\alpha)\&E(\tau\alpha(A(\alpha)\&E(\alpha))))$ - из 6, по AS
9. Противоречие 3, 8

T80. $\neg E(\tau\alpha\mathcal{P}(\alpha))\supset(\tau\alpha\mathcal{P}(\alpha)\neq\tau\alpha(\mathcal{P}(\alpha)\&E(\alpha)))$

1. $\neg E(\tau\alpha\mathcal{P}(\alpha))$ - посылка

2.$\forall[\alpha\mathcal{P}(\alpha)]\mathcal{P}(\alpha\mathcal{P}(\alpha))$ - st1

3$\mathcal{P}(\tau\alpha\mathcal{P}(\alpha))$ - $\forall$u, 2

4.$\tau\alpha\mathcal{P}(\alpha)=\tau\alpha((\mathcal{P}\alpha)\&E(\alpha))$ - посылка

5$\mathcal{P}(\tau\alpha(\mathcal{P}(\alpha)\&E(\alpha)))$ - =u, 4, 3

6$\mathcal{P}(\tau\alpha(\mathcal{P}(\alpha)\&E(\alpha)))\&E(\tau\alpha(\mathcal{P}(\alpha)\&E(\alpha)))$ - из 5 по st2

7$E(\tau\alpha((\mathcal{P}(\alpha)\&E(\alpha)))$ - &и, 6

8.$\neg E(\tau\alpha(\mathcal{P}(\alpha)\&E(\alpha)))$ - =и, 4, 1

9.Противоречие 7, 8

T81.$\forall[\alpha\mathcal{P}(\alpha)]\neg E(\alpha\mathcal{P}(\alpha))\supset\neg\mathcal{P}(\tau\alpha(\mathcal{P}(\alpha)\&E(\alpha)))$

1.$\forall[\alpha\mathcal{P}(\alpha)]\neg E(\alpha\mathcal{P}(\alpha))$ - посылка

2$\mathcal{P}(\tau\alpha(\mathcal{P}(\alpha)\&E(\alpha)))$ - посылка

3$\mathcal{P}(\tau\alpha(\mathcal{P}(\alpha)\&E(\alpha)))\&E(\tau\alpha(\mathcal{P}\alpha)\&E\alpha)))$ - из 2 по st2

4$\mathcal{P}(\tau\alpha(\mathcal{P}(\alpha)\&E(\alpha)))$ |

5$E(\tau\alpha(\mathcal{P}(\alpha)\&E(\alpha)))$ | - &и, 3

6$H[\alpha\mathcal{P}(\alpha)](\tau\alpha(\mathcal{P}(\alpha)\&E(\alpha))=\alpha\mathcal{P}(\alpha))$ - =в, 4

7.$\tau\alpha(\mathcal{P}(\alpha)\&E(\alpha))=\tau\alpha\mathcal{P}(\alpha)$ - Hи,6,$\tau\alpha\mathcal{P}(\alpha)$ - огр.

8$E(\tau\alpha\mathcal{P}(\alpha))$ - =и, 7, 5

9.$\neg E(\tau\alpha\mathcal{P}(\alpha))$ - $\forall$и, 1

10.Противоречие 8, 9

T82.$E(\tau\alpha A)\supset H[\alpha(A\&E)](\tau\alpha A=\alpha(A\&E))$

Наконец, в SP= может быть введен гильбертовский ε-оператор посредством контекстуального определения:

Д4.$B(\varepsilon\alpha A)\leftrightharpoons B(\tau\alpha A)\&E(\tau\alpha A)$, а также контекстуально определен ι-оператор через определение:

Д5.$B(\iota\alpha A)\leftrightharpoons B(\varepsilon\alpha A)\&\forall[\alpha A]\forall[\beta A](\alpha A=\beta A)$

В этом случае можно вывести теорему о переименовании tα и α операторов специфицированных термов:

T83.$B(\iota\alpha A(\alpha))\supset(\tau\alpha A(\alpha)=\tau\beta A(\beta))$

1.$B(\iota\alpha\alpha A(\alpha))$ - посылка

2.$\forall[\alpha A(\alpha)]\forall[\beta B(\beta)](\alpha A(\alpha)=\beta A(\beta))$ - Д5, 1

$\tau\alpha A(\alpha)=\tau\beta A(\beta)$ - $\forall$и, 2

T84.$B(\iota\alpha A(\alpha))\&A(\iota\alpha B(\alpha))\supset(\tau\alpha A(\alpha)=\tau\alpha B(\alpha))$

1.$B(\iota\alpha A(\alpha))\&A(\iota\alpha B(\alpha))$ - посылка

2.$B(\iota\alpha A(\alpha))$ |

3.$A(\iota\alpha B(\alpha))$ | - &и, 1

4.$\tau\alpha B(\alpha)=\tau\beta B(\beta)$ - из 3 по T83

5.$B(\tau\alpha A(\alpha))$ - Д5, 2

6.$H[\beta B](\tau\alpha A(\alpha)=\beta B(\beta)$ - =в, 5

7.$\tau\alpha$A(α)=$\tau\beta$B(β) - Ни, 6, $\tau\beta$B(β) - огр.
8.$\tau\alpha$A=$\tau\alpha$B(α) - транзитивность 4, 7

В SP= имеет место также следующая важная теорема:
T85.(E(αA)&$\forall$[αU](A(αU)$\supset$C(αU)))$\supset$H[αc]E(αc)

Итак, предикат существования ни с семантической, ни с дедуктивной точек зрения не отличим от обычных примитивных предикатов, специфичность же его синтаксического употребления определяется лишь дефинициями Д3, Д4, и Д5, где использование предиката существования и именно предиката существования оказывается существенным.

Важной особенностью SP= является то, что здесь не действует закон силлогистического тоджества в форме A(αA). Это позволяет поставить вопрос о несовпадении двух отличных друг от друга мыслительных процедур - предикации и характеризации. Речь, собственно, идет о двух способах использования в языке выражений, относящихся к семантической категории предикаторов, т.е. языковых конструкций, выражающих свойства и отношения. С одной стороны, эти конструкции используются для характеризации некоторого объекта, что достигается путем построения его описательного имени αA(α). С другой стороны, мы можем предицировать (утверждать) наличие признаков у предметов, что осуществляется формулировкой предикатных выражений вида A(α).

Конструкции αA(α) и A(α) имеют различный смысл. Действительно, Sp= строится таким образом, что на процесс характеризации не накладывается никаких ограничений: мы можем в пределах первопорядковой структуры строить любые описательные имена, в том числе и заведомо противоречивые. В этом находит свое выражение та свобода творческого, созидательного начала, которая так присуща человеческой деятельности. Однако, чтобы SP= не оказалась противоречивой, необходимо как-то эту исходную свободу по построению описательных имен ограничить. Этой ограничительной задаче как раз и служит отказ от силлогистического тождества A(αA). Иначе говоря, если даже некоторый предмет и охарактеризован как обладающий свойством A , это еще не означает, что можно предицировать предмету αA(α) свойство A, т.е. утверждать A(αA(α)). Ситуация здесь напоминает ту, которая имеет место в Prinicpia Mathematica Б.Рассела. Последний тоже допускает использование произвольных описательных имен, Но условия приписывания свойств объектам ограничивается таким образом, что истинная предикация оказывается возможной только относительно непустых (в смысле фактуальной насыщенности) описательных имен. Но подобное решение в определенной степени неудовлетворительно, а ограничения, наложенные Б.Расселом, являются слишком жесткими. Поэтому в SP= условия на предикацию "смягчаются". Единственным формальным ограничением становится отказ от силлогистического тождества $A(\alpha A)$.

Предикация является весьма сильной формой связи объекта с признаком, ибо из предикаации $A(\alpha)$ вытекает и возможность построения соответствующей характеризации, т.е. построения описательного имени $\alpha A(\alpha)$. Это прямо следует из принятия правила =в. Однако переход в обратную сторону, от некоторой характеризации объекта к соответствующей предикации, в общем случае неправомерен. Например, если некоторый объект a охарактеризован как $\alpha A(\alpha)$, т.е. $a=\alpha A(\alpha)$, то это еще не означает, что мы можем в SP= получить утверждение A(a). Доказуемо лишь утверждение

$$(a=\alpha A(\alpha)\&A(\alpha A(\alpha)))\supset A(a),$$

где роль силлогистического тождества $A(\alpha A)$ вполне очевидна. Именно тождество последнего вида позволяет осуществить предикацию A(a), т.е. "вытащить" характеристику из выражения $\alpha A(\alpha)$ и предицировать ее объекту.

Важность этого обстоятельства можно продемонстрировать на примере так называемого онтологического доказательства бытия Бога.

Определив Бога выражением $\tau\xi(B(x)\&E(x))$, т.е. таким описательным именем, в состав которого в явной форме вошел предикат существования, Ансельм считал далее возможным "вытянуть" существование из характеристики $B(x)\&E(x)$, чтобы предицировать его такому псевдообъекту, как Бог. Однако такая процедура перехода от характеризации некоторыми свойствами объекта к их предикации неправомерна. Это возможно только в случае, если объект, задаваемый выражением $\tau x(B(x)\&E(x)$ является возможным, т.е. для него верно утверждение силлогистического тождества. Но, применяя последенее к выражению $\tau x(B(x)\&E(x))$, будем иметь:

$B(\tau x(B(x)\&E(x)))\&E(\tau x(B(x)\&E(x)))$,

где второй член коньюнкции как раз и представляет собой утверждение о существовании Бога. Таким образом, рассуждение Ансельма некорректно в том смысле, что для доказательства бытия бога оно уже должно содержать в качестве допущения утверждения о его существовании. Более детальный анализ этого доказательства содержится в [6], где существенную роль играют доказанные выше теоремы Т79, Т80, Т81,Т82,Т85.

Вопрос об истинности предикации относительно псевдообъектов чрезвычайно важен для понимания SP=. Обычно истину трактуют как категорию объективную, характеризующую отношение наших утверждений к тому, что объективно существует вне нас, ибо только в таком случае можно говорить о независимой от языка эмпирической, опытной проверки утверждений.

С совершенно иной ситуацией мы сталкиваемся в том случае, когда имеем дело с заведомо нереальными фикциями. Говорить здесь об объективной истинности предикации не представляется возможным. Но означает ли это, что мы вообще в данном случае не можем говорить об истинности предикации? И что должно означать в таких условиях принятие для SP= семантики референциального типа, где понятие истины занимает центральное место? Ответы на эти вопросы можно получить при рассмотрении, например, теоретического естествознания как совокупности таких дисциплин, где развитие наших представлений о мире идет через оформление не только сферы истинного знания, но и знания гипотетического, проблемного характера. Наличие подобного знания указывает на то, что два процесса - построение предикации и установление истинностных оценок - не всегда совпадают во времени. Ведь прежде чем мы получим возможность ставить вопрос об истинности той или иной предикации, нам предварительно необходимо саму эту предикацию сформулировать. Таким образом задача теоретического естествознания становится двуединой. Она состоит не только в том, чтобы решать вопрос об истинности наших утверждений о мире, но и в том, чтобы предварительно построить (предложить) некоторую систему взаимосвязанных утверждений, которая вначале выступает в качестве гипотетического знания и которая далее будет проверятся на истинность.

Именно для решения этой задачи - построения взаимосвязанной системы предикации - нам и нужна референциальная семантика для SP=. И здесь понятие истины непосредственно оказывается необходимым. Ведь взаимосогласованность как раз и должна состоять в согласованности по истине. И это верно даже в том случае, когда утверждение об истине носит сугубо гипотетический характер.

Итак, мы не предполагаем, что семантика для Sp= прямо указывает на возможность устанавливать объективную истинность тех атомарных утверждений, субъектами которых являются псевдообъекты. Она позволяет лишь строить взаимосогласованную, т.е. непротиворечивую систему предикации. Однако, признав это, мы пришли к новому вопросу: коль скоро семантика SP= не расчитана на то, чтобы практически осуществлять отбор истинной предикации, то на каком основании мы должны принимать или не принимать определенные предикации? Например, должны ли мы принять утверждение "Пегас - крылатый конь"? Или это утверждение должно быть отброшено?

Для решения этого круга задач мы постулируем в SP= два дефинициальных правила, позволяющих работать с дефинициями:

$$\text{ДR1}\quad \frac{a \leftrightharpoons \tau\alpha A(\alpha) \& A(\tau\alpha A(\alpha))}{A(a)}$$

$$\text{ДR2}\quad \frac{\mathcal{P}(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \leftrightharpoons A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \& A(\alpha_1,\ldots,\alpha_i A(\alpha_1,\ldots,\alpha_n),\ldots,\alpha_n)}{[\alpha_i \mathcal{P}(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_n)]A(\alpha_1,\ldots,\alpha_i \mathcal{P}(\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_n),\ldots,\alpha_n)}$$

Выражения, стоящие в заключениях этих правил, хотя и не обязаны быть объективно истинными, могут тем не менее трактоваться как принятые, а именно - принятые в силу дефиниции. Если угодно, о них можно говорить и как о дефинициально истинных предложениях, но, конечно, термин "истина" используется здесь уже не в обычном классическом (аристотелевском) смысле, т.е. корреспондентская концепция истины теперь заменяется концепцией когерентной истины.

Пусть значение термина "Пегас" задается определением:
Пегас$\leftrightharpoons$τx(Кр(x)&К(x))&Кр(τx(Кр(x)&К(x)))&К(τx(Кр(x)&К(x))), где Кр(x) - "x крылат" и К(x) - "x конь". Используя правило ДR1, получаем следующую предикацию: "Пегас - крылат и Пегас - конь", что как раз и есть утверждение "Пегас - крылатый конь".

Очевидно, далее, что любой предикат, который логически вытекает из свойства "быть крылатым" или из свойства "быть конем", будет также дефиницально истинен для Пегаса. Это определяется теоремами T25, T26, T27. Кроме того, мы можем принять новые дефиниции, задающие предикаты "крылат" и "конь" и по правилу ДR2 получить ряд новых утверждений о Пегасе. Этот процесс может продолжаться и далее, порождая таким образом систему взаимосвязанных утверждений. Надо иметь ввиду также и следующее обстоятельство: мы можем на базе SP= строить некоторые теории и потому ряд утверждений может быть введен аксиоматически.

Конечно, указанный способ обоснования утверждений страдает тем недостатком, что он зависит от корректности принятых дефиниций, т.е. от того, будет ли иметь место силлогистическое тождество $A(\alpha A)$. Выше указывалось, что данное силлогистическое тождество справедливо для непротиворечивых предикатов $A(\alpha)$. Однако в силу неразрешимости первопорядковой логики, у нас нет средств для однозначного решения вопроса, какой предикат логически противоречив, а какой нет. Более того, дело осложняется также и тем, что даже в случае логической непротиворечивости предиката $A(\alpha)$ он может оказаться фактуально противоречивым, если к SP= добавлена некоторая совокупность фактуальных постулатов аксиоматически. Например, предикат "Круглый (x)&Квадратный(x)" логически непротиворечив, но если к SP= присоединить постулаты геометрии, то это предикат станет в так расширенной системе уже противоречивым. Таким образом, у нас нет способов решения вопроса о непротиворечивости (логической или фактуальной) тех или иных предикатов. Вопрос этот может быть решен только в ходе познания, в ходе развертывания некоторой системы знания, так как этот процесс не только порождает одни истины из других, но и способствует выявлению скрытых противоречий.

Это положение, может быть, выглядит несколько необычно только в силу того, что мы часто забываем об искусственности той ситуации, которая описывается А.Тарским в его определении понятия истины по схеме " ⌜p" - истинно ≡ p " и которая приводит к корреспондентской идее, что каждое атомарное предложение может быть оценено как истинное или ложное независимо от истинности других предлжений. На самом же деле, это просто удобная идеализация, а реальный процесс познания таков, что во многих случаях определить истинность одних предложений независимо от истинности других совершенно невозможно. Например, именно таков характер утверждений геометрии. Определение истины по Тарскому - это только абстракция, согласно которой действительность нам, якобы, дана полностью и окончательно, во всем объеме и наглядной форме. Принимая для тех или иных целей такую концепцию нашего познавательного отношения к миру, нельзя в тоже время забывать о творческих способностях человека, о его познавательной активности, которая позволяет нам нечто утверждать не только относительно и в связи с наличной действительностью, но и рассуждать о прошлом и будущем, об объектах гипотетической природы, т.е. нельзя забывать, что у нас есть не только глаза и уши, но есть также мышление и логика.

Литература

1. *Бочаров В.А.* Исчисление предикатов с универсалиями (1.Формальное построение) // Философские вопросы неклассических логик: Труды научно-исследовательского семинара по логике ИФ АН СССР. М., 1990.
2. *Бочаров В.А.* Исчисление предикатов с универсалиями (II.Семантика) // Логические методы в компьютерных науках: Труды научно-исследовательского семинара по логике ИФ АН СССР. М., 1991.
3. *Meinong A.von* Uber Annahmen. Leipzig, 1902.
4. *Meinong A.von* The theory of objects. Realism and Background of Phenomenology. 1960.
5. *Войшвилло Е.К.* Понятие. М., 1967.
6. *Бочаров В.А.* Анализ так называемого онтологического доказательства бытия бога и его критика Кантом // Модальные и релевантные логики. М., 1982.

Сидоренко Е.А.

РЕЛЕВАНТНАЯ РЕЛЯЦИОННАЯ СЕМАНТИКА С ДВУМИРНЫМИ ТОЧКАМИ СООТНЕСЕНИЯ

Предлагаемая здесь семантика отличается от обычной семантики крипкевского типа тем, что отношение достижимости устанавливается не на множестве отдельных миров, а на их упорядоченных парах. Каждую такую пару составляют мир атомарных предложений и мир формул. Именно эти пары и составляют то, что мы называем "миром" или универсумом рассуждения. Принципиальной особенностью вводимой семантики является то, что никакая формула не является в ней тождественно истинной или тождественно ложной в том смысле, что для всякой формулы имеются универсумы рассуждений, в которых она может быть верифицирована и такие, в которых она фальсифицируется. При этом семантически истинной считается только такая формула A, которая верифицируется в каждом мире, в котором верифицируется соответствующая релевантная импликация $A \to A$.

Семантика системы E

Мы начнем с построения семантики для известной релевантной системы E Андерсона и Белнапа (аксиоматическое построение системы E приводится ниже). Сначала будет изложена техническая сторона дела, а потом будут даны некоторые содержательные объяснения.

Язык релевантной пропозициональной логики содержит бесконечное число пропозициональных переменных и следующие логические связки:"$\bullet$" - конъюнкцию,"$\vee$" - дизъюнкцию,"$\neg$" - отрицание и "$\to$" - (релевантную) импликацию.

Модельная структура представляет собой пару $\langle W,R \rangle$, где W есть бесконечное множество универсумов рассуждений (миров) w_1, w_2, ..., каждый w_i из которых в свою очередь представляет собой упорядоченную пару $\langle w_i^a, w_i^e \rangle$. Первый член этой пары, или атомарный мир, есть некоторый список литералов (пропозициональных переменных или их отрицаний). Требование полноты, согласно которому для каждой пропозициональной переменной в атомарный мир входит или сама переменная или ее отрицание, к атомарным мирам не предъявляется. В принципе такой мир может быть даже пустым. Вместе с тем вводится требование непротиворечивости атомарных миров: никакая пропозициональная переменная a не может входить ни в какой мир w_i^a одновременно со своим отрицанием.

В свете последних семантических веяний это столь естественное в недавнем прошлом требование может показаться достаточно неожиданным. Скажем сразу поэтому, что в предлагаемой семантике это требование в чисто техническом смысле не является существенным, так как по причинам, которые будут объяснены ниже, оно не исключает возможности верифицировать противоречивые формулы. Введение этого требования связано поэтому лишь с некоторыми идеологическими и методологическими предпочтениями автора, который, как логик, никак не желает допускать существования (тем более в качестве исходных) "невозможных" возможных миров. Такое неприятие противоречия в атомарном, фактуальном мире никак не исключает возможности его появления в универсумах рассуждений, например, за счет каких-то допущений, которые могут быть намеренно или ненамеренно противоречивыми.

Второй член пары, w_i^e - мир следствий, есть множество формул принятого языка, в нашем случае языка исчисления E. К данному множеству предъявляется только следующее требование конъюнктивной замкнутости. Если A и B - элементы этого множества, то конъюнкция $A \bullet B$ также является его элементом. И, если $(C \to A)$ и $(C \to B)$ - элементы такого множества, то к числу его элементов принадлежит $(C \to A \bullet B)$. Формально:

$$\forall w_j((A \in w_j^e) \& (B \in w_j^e) \supset (A \bullet B \in w_j^e)).$$

$$\forall w_j(((C \to A) \in w_j^e) \& ((C \to B) \in w_j^e) \supset (C \to A \bullet B) \in w_j^e).$$

Наконец R является бинарным рефлексивным и транзитивным отношением достижимости на W. При этом выражения Rw_iw_j и $Rw_i^aw_j^a$ рассматриваются как идентичные.

Мы используем выражения $T(A)/w_i$ и $F(A)/w_i$ для утверждений о верифицируемости и соответственно о фальсифицируемости формулы A в мире w_i. Заметим, что эти утверждения будут рассматриваться как совершенно тождественные утверждениям $T(A)/w_i^a$ и $F(A)/w_i^a$ соответственно. Будут справедливыми также следующие соотношения:

$$T(A)/w_i = F(\neg A)/w_i \text{ и } T(\neg A)/w_i = F(A)/w_i.$$

Определение D1: В мире w_i^a формулы верифицируются исключительно в соответствии со следующими условиями:

(1) Если A - пропозициональная переменная или *ее* отрицание, и A входит в список w_i^a, то $T(A)/w_i$.

(2) $T(A \bullet B)/w_i = T(A)/w_i$ и $T(B)/w_i$.

(3) $T(A \vee \mathrm{B})/w_i = T(A)/w_i$ или $T(B)/w_i$.

(4) $T(\neg(A \vee B))/w_i = T(\neg A)/w_i$ и $T(\neg B)/w_i$.

(5) $T(\neg(A \bullet B))/w_i = T(\neg A)/w_i$ или $T(\neg B)/w_i$.

(6) $T(\neg(A \to B))/w_i = \exists w_j R w_i w_j \;\&T(A)/w_j \;\&\; F(B)/w_j$.

Мы прервем теперь определение D1, чтобы принять некоторые соглашения. Введем с чисто техническими целями внеязыковую бинарную связку "-->", которую мы называем квазиимпликацией. Заметим, что понятие правильно построенной формулы при этом не изменяется, так как знак квазиимпликации в формулу входить не может.

$$(A\text{-->}B)/w_i =_{\mathrm{df}} \forall w_j (R w_i w_j \supset (T(A)/w_j \supset T(B)/w_j \& (B \in w_j^e)) \&$$

$$. \& (T(@B)/w_j \supset (T(@A)/w_j \& (T@\mathrm{A} \in w_j^e)) \& (T(@A \vee B)/w_j).$$

Логические знаки, связывающие метавыражения и отсутствующие в нашем объектном языке, должны пониматься здесь как метасимволы с соответствующими значениями. Выражение вида $@A$

означает $\neg A$ или A', когда A имеет вид $\neg A'$. Иными словами, данное выражение говорит о добавлении к соответствующей формуле знака отрицания или снятии у нее одного из таких знаков.

На отношение достижимости R налагаются ограничения, в соответствии с которыми:

$$(A\dashrightarrow B)/w_i \; \& \; \forall C \forall w_j (Rw_i w_j \supset (F(C\to B)/w_j \supset \neg(C\to A) \in w_j^e)) \supset$$
$$\supset ((C\to A) \dashrightarrow (C\to B))/w_i).$$

$$\forall C((C\to A)\dashrightarrow(C\to B))/w_i \supset \forall D((D\to C\to A)\dashrightarrow(D\to C\to B))/w_i.$$

Определение D1 (продолжение):

(7) $T(A\to B)/w_i \;=\; T(@B\to @A)/w_i = (A\dashrightarrow B)/w_i \& \forall C((C\to A)\dashrightarrow$
$\dashrightarrow (C\to B))/w_i.$

(8) $\forall w_i (T(A)/w_i \supset T(B)/w_i) \; \& \; (T(C)/w_i \supset T(D)w/_i) \supset.$

$\supset. \forall w_j T((A\to B)\bullet(C\to D)\to E)/w_j \supset T(E)/w_i.$

Определение условий верификации формул завершено, и можно сделать некоторые пояснения.

Обратим прежде всего внимание на то обстоятельство, что можно вести речь о верифицируемости и фальсифицируемости формулы в некотором мире w_i или в его атомарной части, но не в мире следствий. В последний формулы могут только входить или не входить. Пропозициональная переменная или же ее отрицание могут верифицироваться в мире w_i^a также и при отсутствии их в соответствующем списке w_i^a литералов. Так, например, в случае верности в w_i^a импликации $p \to q$ и ее антецедента p в этом мире будет верифицироваться q независимо от того входит ли q в список w_i^a или же нет.

Важно заметить здесь, что указанное обстоятельство открывает возможность верифицировать в атомарных мирах противоречивые формулы несмотря на предъявляемое к ним требование непротиворечивости относительно непосредственно входящих в них литералов. Это ясно из того, что импликация может обеспечить верифицируемость своего консеквента в мире, где верифицируется его отрицание, да и сам консеквент может изначально быть противоречивым.

Хотя формулы с классическими связками верифицируются в атомарных мирах стандартным образом следует иметь в виду, что дизъюнкция $p \vee q$ может верифицироваться в таком мире, в котором нельзя верифицировать ни p, ни q. Так в случае верности в мире w_i импликации $\neg p \rightarrow q$ указанная дизъюнкция является истинной во всех достижимых из w_i мирах, причем это означает, что во всех этих мирах истинно p или q, но не обязательно известно, какое именно из них. Можно сказать, таким образом, что дизъюнкция понимается здесь неконструктивно.

Главные разъяснения относятся, естественно, к той част определения D1, которая связана с верификацией релевантной импликации. На атомарные миры не делается никаких ограничений с точки зрения их полноты. В них не исключается также возможность верификации противоречивых формул. Это, очевидно, не позволяет верифицировать или фальсифицировать во всех возможных мирах ни одну из формул, содержащую только классические связки.

Такой подход, как известно, позволяет построить семантику так называемой первопорядковой релевантной логики, описывающей утверждения вида $A \rightarrow B$, где A и B - формулы классической логики[1]. Как мы увидим ниже, в нашем случае верность B во всех мирах, в которых верифицируется A, тоже будет означать, что $A \rightarrow B$ имеет силу в релевантной логике, но это отнюдь не значит, что эта последняя формула верифицируется во всех мирах. То обстоятельство, что, скажем, во всех мирах, где верифицируется A, верифицируется само A, а также $A \vee B$, $\neg\neg A$ и т.п., рассматривается как свидетельство чисто фактического положения дел, не дающее еще основания для утверждений о верификации соответствующих импликаций: $A \rightarrow A$, $A \rightarrow A \vee B$, $A \rightarrow \neg\neg A$ и т.д.

Утверждение об импликативной связи (логической или онтологической) не может быть обосновано никаким фактическим положением дел до тех пор, пока такого рода связь между какими-то вы-

---

1 См. по этому поводу *Войшвилло Е.К. Философско-методологические аспекты релевантной логики. М.,1988.*

сказываниями (событиями) не будет постулирована[2]. Заметим, что и в тех случаях, когда речь идет об импликации между двумя импликациями же, истинность первой из которых детерминирует истинность второй, мы все равно не имеем ее (этой импликакции импликаций) верифицируемости во всех мирах. Так, в силу D1 во всех мирах, где верно $A \to B$ будет верифицироваться $C \to A \to .C \to B$. Но сам принцип транзитивности $A \to B \to .C \to A \to .C \to B$, как и любой иной логический принцип, верифицировать во всех мирах не удастся. Собственно это обстоятельство и является сердцевиной и принципиальной особенностью предлагаемой семантики.

Именно для этого используется имеющийся в каждом универсуме рассуждений w_i мир следствий w_i^e, который мы будем называть также теоретическим миром или "вторым этажом". При этом импликация $A \to B$ верифицируется в мире w_i только при условии, что во всяком достижимом из w_i мире w_j, в котором на "первом этаже", т.е. в атомарном мире верифицируется A, на втором этаже имеется B. То, что B должно верифицироваться также и на первом этаже очевидно. Требуется также, чтобы в указанных мирах в случае фальсификации B (верификации $\neg B$) на втором этаже было $\neg A$. За счет этого реализуется принцип контрапозиции импликации.

Очевидно, что необходимо учесть следующую ситуацию. Пусть в некотором мире верифицируются формулы: $(A \to B)$, $(A \to \neg B)$, $(A \to C)$, $(A \to \neg C)$ и A. Тогда в каждом достижимом мире, в котором будет истинно A, для B и C (которые могут быть между собой никак не связаны) будет иметь силу оговоренное выше условие: на первом этаже верифицируется B, на втором имеется C, и т.д. Иначе говоря, экстенсионального характера задания условий истинности импликации преодолеть пока не удается.

Для решения этой задачи и выдвигается требование, чтобы обсуждаемое условие имело силу при верификации $A \to B$ не только для A и B, но и для $(C \to A)$ и $(C \to B)$, где C - произвольная формула. В силу того, что число таких формул C является бесконечным, нет никакой возможности реализовать это требование чисто экстенсиональным путем. Дело в том, что $(C \to A) \dashrightarrow (C \to B))/w_i$ принципиально возможно обосновать только в случае постулирования $A \to B$

---

2 Именно в силу этого обстоятельства мы рассматриваем предлагаемую семантику как семантику юмовского, а не лейбницевского типа, в которой логические истины рассматриваются как истины во всех возможных мирах.

или получения его из других утверждений о следовании в соответствии с имеющимися семантическими требованиями.

Необходимо пояснить теперь, за счет чего происходит замыкание миров относительно своих семантических следствий. Что касается атомарных миров, то здесь все достаточно очевидно: такое замыкание имеет место в силу самих условий верификации. В мире следствий дело обстоит иначе, так как здесь речь о верификации вообще не может иметь места. Пусть в некотором мире является верным $A \rightarrow B$, и пусть C есть семантическое ослабление формулы B. Тогда в каждом достижимом мире, в котором истинно A, в мире следствий наряду с B должно быть также и C (а число таких C, очевидно, является бесконечным). Такое требование реализуется за счет принципа контрапозиции и семантической замкнутости атомарных миров.

Действительно, допустим в качестве C выступает формула $B \vee D$. Так как в избранном нами мире является верным $A \rightarrow B$, в этом мире верно также $\neg B \rightarrow \neg A$. И поскольку в $\neg B$ является сематическим ослаблением $\neg(B \vee D)$, то в силу пункта (8) определения D1 верным будет также $\neg(B \vee D) \rightarrow \neg A$, а значит и $A \rightarrow B \vee D$. Это обеспечивает нахождение консеквента последней формулы в соответствующем мире следствий. И так дело обстоит для любых семантических ослаблений формулы B.

Мы можем теперь показать, что построенная нами семантика, которую мы в дальнейшем будем обозначать как S^{ea}, адекватна системе E:

Аксиомы E:

A1. $(A \rightarrow A) \bullet (B \rightarrow B) \rightarrow C \rightarrow C$
A2. $A \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C$
A3. $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B$
A4. $(A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow B$
A5. $A \bullet B \rightarrow A$
A6. $A \bullet B \rightarrow B$
A7. $(A \rightarrow B) \bullet (A \rightarrow C) \rightarrow A \rightarrow B \bullet C$
A8. $A \rightarrow A \vee B$
A9. $B \rightarrow A \vee B$
A10. $(A \rightarrow C) \bullet (B \rightarrow C) \rightarrow A \vee B \rightarrow C$
A11. $A \bullet (B \vee C) \rightarrow A \bullet B \vee C$
A12. $A \rightarrow B \rightarrow . \neg B \rightarrow \neg A$
A13. $A \bullet \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$
A14. $A \rightarrow \neg\neg A$
A15. $\neg\neg A \rightarrow A$

Правила вывода E:

R1. Из $A \rightarrow B$ и A следует B (Modus ponens, сокращенно: MP).

R2. Из A и B следует $A \bullet B$ (Правило адъюнкции).

Как уже отмечалось, никакая формула А не является в семантике S^{ea} ни тождественно истинной, ни тождестиенно ложной в том смысле, что всегда найдутся миры, в которых A не верифицируется, а значит и такие в которых A не фальсифицируется, Это относится, очевидно, и ко всем аксиомам и теоремам системы E. В связи с этим, чтобы иметь возможность говорить о семантической истинности теорем E, вводится специальное понимание семантической истинности.

Определение D2. Некоторая формула B называется семантически истинной в семантике S^{ea} (символически: $\models B$), если и только если во всяком мире w_i, в котором верифицируется $B \rightarrow B$, верифицируется B. Или формально:

$$\models B \equiv_{\mathrm{df}} \forall w_i (T(B \rightarrow B)/w_i \supset T(B)/w_i.$$

Лемма 1. Если $\forall w_i (T(A \rightarrow A)/w_i \supset T(B)/w_i$, то $\models B$.

Справедливость леммы вытекает из следующих утверждений, верных для любого мира w_i:

$$(T(A \rightarrow A)/w_i \supset T(B)/w_i \qquad (1)$$

$$T(B \rightarrow B)/w_i \supset T((A \rightarrow A) \rightarrow B \rightarrow .(A \rightarrow A) \rightarrow B)/w_i \qquad (2)$$

$$T(B \rightarrow B)/w_i \supset T((A \rightarrow A) \rightarrow B)/w_i \qquad (3)$$

$$T((A \rightarrow A) \rightarrow B)/w_i \supset T(B)/w_i \qquad (4)$$

$$(T(B \rightarrow B)/w_i \supset T(B)/w_i \qquad (5)$$

Утверждение (1) очевидно берется как посылка. Справедливость (2) очевидна. Утверждение (3) вытекает из (2) и (1) в соответствии с пунктом (8) определения D1. На основании этого же пункта являеется верным (4).Наконец (5) получается по транзитивности из (3) и (4). Лемма доказана.

Покажем, что все доказуемые в системе E формулы являются в S^{ea} семантически истинными в смысле D2.

Метатеорема МТ1. Если формула B есть теорема системы E, то $\models B$ в S^{ea}.

Начнем с доказательство с констатации следующего факта. Если формула имеет вид импликации $A \to B$, то для того, чтобы убедиться в ее семантической истинности достаточно показать, что B верифицируется во всех мирах в которых верифицируется A. Действительно, если дело обстоит указанным образом, то утверждение о семантической истинности $A \to B$ получается из $A \to B \to . A \to B$ немедленно в силу пункта (8) определения D1.

Семантическая истинность аксиомы A1 немедленно вытекает из пункта (8) определения. По причине, которая станет ясной ниже, мы обратимся прежде к аксиоме A3, а затем уже вернемся к A2. В аксиоме A3 верифицируемость ее консеквента является, в соответствии с D1, условием верифицируемости ее, и значит аксиома семантически истинна. Семантическая истинность A2 за счет принципа контрапозиции может быть обоснована также, как и A3.

Семантическая истинность аксиомы A4 вытекает из того, что условием верификации антецедента этой аксиомы, т.е. $A \to A \to B$, является верификация ее же консеквента $A \to B$.

Что касается аксиом A5, A6, A8, A9, то их семантическая истинность очевидна. У аксиомы A7 это свойство вытекает из конъюнктивной замкнутости любого мира следствий. Аксиома A10 за счет принципа контрапозиции сводится к A7. Семантическая истинность всех остальных аксиом A11-A15 с очевидностью вытекает из условий верификации соответствующих формул.

Мы установили, таким образом, что все аксиомы системы E семантически истинны, и значит каждая аксиома Ai верифицируется во всех тех мирах, в которых верифицируется Ai $\to$ Ai. Для завершения доказательства теоремы *МТ1* нам достаточно показать, что в системе E правила вывода *MP* и правило адъюнкции сохраняют для теорем это свойство в силе. Это означает, что для *MP* надо убедиться, что в случае, когда во всяком мире, в котором верифицируется $A \to B \to A \to B$, верифицируется $A \to B$, и когда во всяком мире, в котором верифицируется $A \to A$, верифицируется A, тогда во всяком мире, в котором верифицируется $B \to B$, верифицируется B.

Покажем, что это действительно так. В мирах, в которых верифицируется $A \to B \to A \to B$, верифицируется, в силу принципа транзитивности, формула $(A \to A) \to A \to .(A \to A) \to B$. В силу семантической истинности формулы A и пункта (8) определения D1, в тех же мирах верифицируется $(A \to A) \to B$, а значит и формула B. А это, в силу Леммы 1, означает, что B верифицируется во всех тех мирах, где верифицируется $B \to B$.

Для правила адъюнкции надо показать, что в случае верности утверждений $T(A \to A)/w_i \supset T(A)/w_i$ и $T(B \to B)/w_i \supset T(B)/w_i$ имеет силу также и $T(A \bullet B \to A \bullet B)/w_i \supset T(A \bullet B)/w_i$. Применение Леммы 1, как и в случае с MP, делает эту задачу несложной.

Теорема MT1 доказана.

Метатеорема MT2 (Теорема полноты). Если B является семантически истинной формулой в семантике S^{ea}, то B есть теорема системы E. Формально: Если $\models B$ в S^{ea}, то $\vdash B$ в E.

Стратегия доказательства состоит в том, чтобы показать, что утверждение

$$\forall w_i (T(A \to A)/w_i \supset T(B)/w_i) \qquad (1)$$

является верным только в случае, когда B есть теорема системы E. Так как, в соответствии с Леммой 1, утверждение (1) равносильно утверждению о семантической истинности B, этого будет достаточно для доказательства MT2.

Так как никакая формула не верифицируется во всех мирах без некоторой предпосылки, очевидно, что (1) может оказаться верным только в случае, когда B получается из $A \to A$ в силу некоторых допустимых семантических преобразований, которые определяются семантическими свойствами связок, заданными определением D1.

Первые пять пунктов определения D1, которые связаны с семантикой классических связок, являются стандартными, и их применение для семантических преобразований исходной формулы всегда будет обеспечивать переход от любой теоремы E к теореме же. Пункт

(6) позволяет считать $\neg(A \to B)$ семантическим ослаблением $A \bullet \neg B$, чему в E соответствует теорема $A \bullet \neg B \to \neg(A \to B)$ и поэтому преобразования, осуществляемые с использованием этого пункта, также оставляют теорему системы E ее теоремой.

В соответствии с пунктом (7) определения D1, семантическим эквивалентом формулы $A \to B$ является $\neg B \to \neg A$, а их семантическими ослаблениями $\neg A \vee B$ и любые формулы вида $B \to C \to . A \to C$, $C \to A \to . C \to B$. Во всех случаях связанные с этими свойствами трансформации любой теоремы E приводят к новой теореме этой системы.

Наконец пункт (8) из D1 позволяет преобразовать в D любую формулу вида $C \to D$, где C есть семнтически истинная в с' ту D1 формула вида $E \to F$ или конъюнкция таких формул. Это равносильно переходу от $C \to C \to D$ к D, что в в случае, когда $C \to C \to D$ теорема E, обеспечивает в E доказуемость формулы D.

Никаких иных семантических преобразований стоящей в антецеденте (1) формулы $A \to A$ кроме названных осуществить нельзя. И так как $A \to A$ есть теорема системы E, получающаяся в результате этих преобразований формула B всегда будет также теоремой этой системы.

Таким образом, теорема МТ2 о семантической полноте системы E доказана.

Из МТ1 и МТ2 немедленно следует:

Метатеорема МТ3. Утверждение $\models B$ верно в семантике S^{ea}, если и только если $\vdash B$ в системе E.

Семантика исчисления R

Формулировка исчисления R получается из формулировки E путем замены во всех аксиомах и правилах вывода E знака "$\to$" на знак "$\Rightarrow$" и добавлением одной дополнительной аксиомы

A16. $(A \Rightarrow . B \Rightarrow C) \Rightarrow B \Rightarrow A \Rightarrow C$.

Семантику S^{ea} для исчисления R мы получим из соответствующей семантики для E за счет изменений в определении D1, которые мы сделаем, принимая следующее:

Определение D3. Формулы языка исчисления R верифицируются в мире w_i исключительно в соответствии со следующими условиями:
(1)-(8) определения D1, в которых одинарная стрелка "$\rightarrow$" заменяется двойной "$\Rightarrow$".

(9) Во всяком универсуме рассуждений w_i, в котором верифицируется формула A, верифицируется формула $A \Rightarrow B \Rightarrow B$. Или формально:

$$\forall w_i(T(A)/w_i \supset T(A \Rightarrow B \Rightarrow B)/w_i).$$

Мы корректируем также соответствующим образом определение семантически истинной формулы:

$$\text{D4.} \models B \equiv_{df} \forall w_i(T(B \Rightarrow B)/w_i \supset T(B)/w_i.$$

Покажем, что все теоремы исчисления R являются семантически истинными в смысле определения D4.

Метатеорема МТ4. Если формула B есть теорема системы R, то $\models B$ в семантике S^{ea} для языка исчисления R.

Учитывая, что произведенные в семантике, построенной для E, изменения сохраняют возможность доказать семантическую истинность аксиом A1-A15 исчисления R, а также свойство правил вывода оставлять такую истинность в силе, для доказательства МТ4 остается установить семантическую истинность аксиомы A16. Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что во всяком мире, в котором верифицируется формула $A \Rightarrow .B \Rightarrow C$, всегда верифицируется также $B \Rightarrow A \Rightarrow C$.

В соответсвии с пунктом (9) определения D3, в каждом мире, в котором верифицируется формула B, верифицируется $B \Rightarrow C \Rightarrow C$, а значит и $(A \Rightarrow .B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$. Мы имеем, таким образом:

$$T(B)/w_i \supset T((A \Rightarrow .B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C)/w_i \qquad (1)$$

Частным случаем утверждения (1) является:

$$T(A \Rightarrow .B \Rightarrow C)/w_i \supset T(\underline{(B \Rightarrow .(A \Rightarrow .B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C)} \Rightarrow .B \Rightarrow A \Rightarrow C))/w_i \quad (2)$$

Из (1) и (2) (см.подчеркнутое выражение), в соответствии с пунктом (8) определения D4, получаем требуемое для доказательства MT4 утверждение о семантической истинности аксиомы A16:

$$T(A\Rightarrow.B\Rightarrow C)/w_i \supset T(B\Rightarrow A\Rightarrow C)/w_i \quad (3).$$

Метатеорема MT5. Если $\models B$ в семантике S^{ea} для языка исчисления R, то формула B доказуема в R (теорема полноты).

То обстоятельство, что пункт (9) определения D4 включает в число семантически истинных формул заведомую теорему R в дополнение к тем формулам, аналоги которых доказуемы в E, делает справедливость MT5 очевидной. Из MT4 и MT5 следует:

MT6. Формула B есть теорема системы R, если и только если $\models B$ в семантике S^{ea} для языка исчисления R.

Семантика S^{ea} для исчисления NR

Исчисление NR получается из исчисления R добавлением четырех модальных аксиом и одного правила вывода. Для удобства приведем формулировку NR полностью.

Аксиомы NR:

A1.$(A\Rightarrow A)\bullet(B\Rightarrow B)\Rightarrow C\Rightarrow C$

A2.$A\Rightarrow B\Rightarrow B\Rightarrow C\Rightarrow A\Rightarrow C$

A3.$A\Rightarrow B\Rightarrow C\Rightarrow A\Rightarrow C\Rightarrow B$

A4. $(A\Rightarrow A\Rightarrow B)\Rightarrow A\Rightarrow B$

A5.$A\bullet B\Rightarrow A$

A6.$A\bullet B\Rightarrow B$

A7. $(A\Rightarrow B)\bullet(A\Rightarrow C)\Rightarrow A\Rightarrow B\bullet C$

A8.$A\Rightarrow A\vee B$

A9.$B\Rightarrow A\vee B$

A10.$(A\Rightarrow C)\bullet(B\Rightarrow C)\Rightarrow A\vee B\Rightarrow C$

A11.$A\bullet(B\vee C)\Rightarrow A\bullet B\vee C$

A12.$A\Rightarrow B\Rightarrow.\neg B\Rightarrow\neg A$

A13.$A\bullet\neg B\Rightarrow\neg(A\Rightarrow B)$

A14.$A\Rightarrow\neg\neg A$

A15. $\neg\neg A\Rightarrow A$

A16. $(A\Rightarrow.B\Rightarrow C)\Rightarrow B\Rightarrow A\Rightarrow C$.

A17.$NA\Rightarrow A$.

A18.$NA\Rightarrow NNA$.

A19.$NA\,NB\Rightarrow N(AB)$.

A20.$N(A\Rightarrow B)\Rightarrow.NA\Rightarrow NB$.

Правила вывода NR:

R1. Из $A\Rightarrow B$ и A следует B (*Modus ponens, сокращенно: MP*).

R2. Из A и B следует $A \bullet B$ (*Правило адъюнкции*).

R3. Из A следует NA (*Правило Геделя*).

Выражение $A \rightarrow B$ понимается в NR как сокращение для $N(A \Rightarrow B)$. Как $E(A)$ будем обозначать формулу, которая получается из A заменой всех вхождений знака "$\Rightarrow$" на "$\rightarrow$". Указанную формулу будем называть E-преобразованием формулы A.

Семантика S^{ea} для NR может быть сформулирована за счет определенного рода преобразования соответствующей семантики для R. Однако, чтобы не отсылать читателя к последней, тем более, что сама она получена из соответствующей семантики для E, мы построим эту новую семантику с самого начала.

Модельная структура представляет собой тройку $<W, R^c, R^n>$, где W есть бесконечное множество универсумов рассуждений (миров) $w_1, w_2, ...$, каждый w_i из которых в свою очередь представляет собой упорядоченную пару $<w_i^a, w_i^e>$. Первый член этой пары, или атомарный мир, есть некоторый список литералов (пропозициональных переменных или их отрицаний). Требование полноты к атомарным мирам не предъявляется. В принципе такой мир может быть даже пустым. Вводится требование непротиворечивости атомарных миров: никакая пропозициональная переменная a не может входить ни в какой мир w_i^a одновременно со своим отрицанием.

Второй член пары, w_i^e - мир следствий, есть множество формул принятого языка, в нашем случае языка исчисления NR. К данному множеству предъявпяется только требование конъюнктивной замкнутости:

$$\forall w_j((A \in w_j^e) \& (B \in w_j^e) \supset (A \bullet B \in w_j^e)).$$

$$\forall w_j(((C \Rightarrow A) \in w_j^e) \& (C \Rightarrow B) \in w_j^e) \supset (C \Rightarrow A \bullet B) \in w_j^e).$$

Наконец R^c и R^n являются бинарными рефлексивными и транзитивными отношениями достижимости на W. При этом выражения Rw_iw_j и $Rw_i^aw_j^a$, где R есть R^c или R^n, рассматриваются как идентичные. R^c является подотношением R^n в том смысле, что $\forall w_j \forall w_i (R^c w_i w_j \supset R^n w_i w_j)$.

Мы используем выражения $T(A)/w_i$ и $F(A)/w_i$ для утверждений о верифицируемости и соответственно о фальсифицируемости формулы A в мире w_i. Причем данные утверждения рассматриваются как совершенно тождественные утверждениям $T(A)/w_i^a$ и $F(A)/w_i^a$ соответственно. Будут справедливыми также следующие соотношения:

$$T(A)/w_i = F(\neg A)/w_i \text{ и } T(\neg A)/w_i = F(A)/w_i.$$

Определение D5: В мире w_i формулы верифицируются исключительно в соответствии со следующими условиями:

(1) Если A - пропозициональная переменная или *ее* отрицание, и A входит в список w_i^a, то $T(A)/w_i$.

(2) $T(A \bullet B)/\text{wi} = T(A)/w_i$ и $T(B)/w_i$.

(3) $T(A \vee \mathrm{B})/w_i = T(A)/w_i$ или $T(B)/w_i$.

(4) $T(\neg(A \vee B)в)/w_i = T(\neg A)/w_i$ и $T(\neg B)/w_i$.

(5) $T(\neg(A\ B))/w_i = T(\neg A)/w_i$ или $T(\neg B)/w_i$.

(6) $T(\neg(A \Rightarrow B))/w_i = \exists w_j R^c w_i w_j \,\&\, T(A)/w_j \,\&\, F(B)/w_j$.

Прежде, чем продолжить D5, примем некоторые соглашения. Введем внеязыковую бинарную связку "-->", которую мы называем квазиимпликацией. Понятие правильно построенной формулы при этом не изменяется, так как знак квазиимпликации в формулу входить не может.

$$(A \dashrightarrow B)/w_i =_{\mathrm{df}} \forall w_j (R^c w_i w_j \supset (T(A)/w_j \supset T(B)/w_j \& (B \in w_j^e)) \&$$
$$\& (T(@B)/w_j \supset (T(@A)/w_j \& (T@\mathrm{A} \in w_j^e)) \& (T(@A \vee B)/w_j).$$

Выражения вида $@A$ означает $\neg A$ или A', когда A имеет вид $\neg A'$. На отношение достижимости R^c налагаются ограничения, в соответствии с которыми:

$$(A \dashrightarrow B)/w_i \,\&\, \forall C \forall w_j (R^c w_i w_j \supset (F(C \Rightarrow B)/w_j \supset \neg(C \Rightarrow A) \in w_j^e)) \supset$$
$$\supset ((C \Rightarrow A) \dashrightarrow (C \Rightarrow B))/w_i).$$

$\forall C((C \Rightarrow A) \dashrightarrow (C \Rightarrow B))/w_i \supset \forall D((D \Rightarrow C \Rightarrow A) \dashrightarrow (D \Rightarrow C \Rightarrow B))/w_i$.

Определение D5 (продолжение):

(7) $T(A \Rightarrow B)/w_i = T(@B \Rightarrow @A)/w_i = (A \dashrightarrow B)/w_i \& \forall C((C \Rightarrow A) \dashrightarrow$
$\dashrightarrow (C \Rightarrow B))/w_i$.

(8) $\forall w_i(T(A)/w_i \supset T(B)/w_i) \& (T(C)/w_i \supset T(D)w/_i) \supset.$
$\supset. \forall w_j T((A \rightarrow B) \bullet (C \rightarrow D) \Rightarrow E)/w_j \supset T(E)/w_i.$

(9) $\forall w_i(T(A)/w_i \supset T(A \Rightarrow B \Rightarrow B)/w_i)$.

(10) $T(NA)/w_i = \forall w_j(R^n w_i w_j \supset T(A)/w_j)$.

(11) $T(\neg NA)/w_i = \exists w_j(R^n w_i w_j \& T(\neg A)/w_j)$.

(12) $\forall w_i(T(NA)/w_i \supset T(N(N(A \Rightarrow B) \Rightarrow NB))/w_i)$.

Определение условий верификации формул языка исчисления *NR* завершено. По существу, определение D4, задающее аналогичные условия для исчисления *R*, если не считать некоторого усиления (за счет замены двойной стрелки на одинарную) пункта (8), дополнено тремя новыми пунктами: (10) - (12). Пункты (10) и (11) нового определения вводят условия верификации оператора необходимости стандартным для реляционных семантик образом. Пункт (12) представляет собой аналог пункта (9). Это становится более очевидным, если записать его с помощью одинарной стрелки:

(12) $\forall w_i(T(NA)/w_i \supset T(A \rightarrow B \rightarrow NB)/w_i)$.

Докажем теперь, как и в предыдущих случаях, две метатеоремы о семантической истинности доказуемых в исчислении *NR* формул и семантической полноте самого этого исчисления.

Как и ранее, поскольку никакая формула принципиально не может верифицироваться во всех мирах, принимается следующее определение семантической истинности формул *NR*:

Определение D6. $\models B \equiv_{df} \forall w_i(T(B \Rightarrow B)/w_i \supset T(B)/w_i$.

Сделаем в связи с данным определением некоторые замечания. Во-первых, так как речь в нем идет обо всех мирах, не имеет значения, берется ли в определяющей части двойная или же одинарная стрелка. И, во вторых, для установления семантической истинности импликативной формулы, будь то $A \Rightarrow B$ или $A \rightarrow B$ (напоминаем, что последнее по определению есть $N(A \Rightarrow B)$), как и в предыдущих случаях, достаточно показать, что во всяком мире, в котором верифицируется A, всегда верифицируется также и B[3].

Метатеорема МТ7. Если формула B есть теорема системы NR, то $\models B$ в семантике S^{ea} для языка исчисления NR.

Очевидно, что все теоремы исчисления R в соответствии с D5 остаются семантически истинными. Для доказательства МТ7 достаточно показать поэтому, что семантически истинными являются аксиомы А17-А20, а правило Геделя сохраняет это свойство за получаемыми по этому правилу формулами.

Тот факт, что аксиома А17 семантически истинна очевиден: формула NA не может верифицироваться ни в каком мире, в котором не верифицируется A. Семантическая истинность А18 следует из того, что NNA может оказаться неверифицируемым в некотором мире w_i только при условии, что в одном из N-достижимых из него миров w_j не верифицируется NA, что возможно только при существовании N-достижимого мира, в котором не верифицируется A, а это при транзитивности отношения N-достижимости невозможно, так как противоречит предпосылке о верифицируемости NA в w_i. Семантическая истинность А19 непосредственно вытекает из условий верификации оператора N и конъюнкции. Наконец семантическая истинность последней из аксиом А20 видна из следующих утверждений.

$$T(N(A \Rightarrow B))/w_i \supset T(N((A \Rightarrow B) \Rightarrow NB) \Rightarrow NB)/w_i \qquad (1)$$
$$T(N(A \Rightarrow B))/w_i \supset \underline{T(NA \Rightarrow N((A \Rightarrow B) \Rightarrow NB)} \Rightarrow .NA \Rightarrow NB)/w_i \qquad (2)$$
$$T(N(A \Rightarrow B))/w_i \supset T(NA \Rightarrow NB)/w_i \qquad (3)$$

Утверждение (1) является верным в силу пункта (12) опрределения D5. (2) получается из (1) на основании свойства транзитивности релевантной импликации. Подчеркнутая часть утверждения (2), опять же в силу пункта (12), является семантически истинной, и поэтому (2) влечет утверждение (3). Таким образом, семантическая истинность А20 установлена.

---

3 Объяснение этому факту см. в начале доказательства МТ1.

Для доказательства МТ7 остается рассмотреть правило вывода R3. Надо показать, что при верности

$$\forall w_i(T(A \Rightarrow A)/w_i \supset T(A)/w_i)$$

с необходимостью верным будет также и

$$\forall w_i(T(NA \Rightarrow NA)/w_i \supset T(NA)/w_i).$$

Справедливость последнего следует из легко получаемого в силу семантической истинности A утверждения

$$T(A \to A \to A \to A \to A \to A)/w_i \supset T(A \to A \to A)/w_i$$

и семантической эквивалентности $A \to A \to A$ и NA. Доказательство МТ7 завершено.

Метатеорема МТ8. Если $\models B$ в семантике S^{ea} для языка исчисления NR, то формула B доказуема в NR (теорема полноты).

Доказательство. Всякая семантически истинная формула A может быть получена из $A \to A$ в результате семантических преобразований, обусловленных определением D5. Всякое такое преобразование оставляет любую теорему исчисления NR, к которой оно применено, теоремой этого исчисления[4]. И так как формула $A \to A$, с которой начинаются семантические преобразования, естественно является теоремой NR, этого достаточно для доказательства МТ8. Из МТ7 и МТ8 вытекает

Метатеорема МТ9. Формула B доказуема в NR, если и только если $\models B$ в семантике S^{ea} для языка исчисления NR.

На этом мы завершаем построение S^{ea} семантик для релевантных систем E, R и NR.

---

[4] Анализ семантических преобразований, возможных в соответствии с конкретными пунктами определения D5, который дается при доказательстве, сохраняет свою силу и в данном случае.

Фам Динь Нгъем

РЕЛЕВАНТНАЯ СЕМАНТИКА РАСШИРЕННЫХ ПРОГРАММ[1]

В статье предлагаются новая семантика неподвижных точек расширенных программ и процедура вычисления по этим программам, построенные на основе натуральных релевантных систем Е.К.Войшвилло.

1.Синтаксис. Предварительные сведения

В первой части статьи мы введем ряд широко используемых понятий логического программирования и сформулируем некоторые известные теоремы.

Язык. Будет использоваться язык логики предикатов первого порядка с равенством $\mathcal{L}$. $\mathcal{L}$ содержит кроме знака импликации "$\supset$" еще знаки "$\rightarrow$", "$\Leftrightarrow$", "$\perp$" для обозначения релевантной импликации, эквивалентности и абсурда. Заметим, что знаки "$\perp$", "$\Leftrightarrow$" и знак равенства "=" никогда не входят в программу, но они нужны для замыкания программы.

Понятие терма определяется обычным образом.

К множеству обычно определяемых формул добавляются формулы вида $A \Leftrightarrow B$ и $\perp$.

Эрбрановские универсум и базис обозначаются соответственно через HU и HB.

Введем некоторые необходимые определения.

Определение 1.1.

Основной терм - это терм, не содержащий переменных. Основной атом - это не содержащая переменных атомарная формула. Литерал - это атом или его отрицание. Позитивным литералом называется атом, негативным литералом называется отрицание атома.

Определение 1.2.

Подстановка есть конечное отображение множества переменных в множество термов. Результат подстановки будем записывать в

---

[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 93-06-10708.

виде $\delta = \{x_1/t_1,...,x_n/t_n\}$, где n - натуральное число. Эта запись предполагает, что $x_1, x_2, x_3, \ ,x_n$ различны и для $i \in \{1,2,...,n\}$ $x_i \neq t_i$.

Если $t_1,t_2,...,t_n$ - переменные, то δ называется перемеинованием. Если все $t_1,t_2,...,t_n$ есть основные термы, то δ называется основной подстановкой. Для выражения E и подстановки δ, $E\delta$ обозначает результат применения δ к E, который получается из E одновременной заменой все x_i $(i=1,2...,n)$ в E термом t_i. Выражение $E\delta$ называется примером E. Пример называется основным, если он не содержит в себе переменных.

Определение 1.3.

Рассмотрим выражение вида

$$R \Leftarrow B_1, B_2, ..., B_m \qquad (1)$$

где R - атом, а m - натуральное число.

1.3.1. Если B_1, B_2,..., B_m - позитивные литералы, то (1) называется программным правилом.

1.3.2. Если B_1, B_2,..., B_m - литералы, то (1) называется общим программным правилом.

1.3.3. Если B_1, B_2,..., B_m - бескванторные формулы, то (1) называется расширенным программным правилом.

Если m=0 то $R\delta$, где δ - основная подстановка, называется позитивным фактом, а его отрицание, $\neg R\delta$, называется негативным фактом.

Определение 1.4.

1.4.1. Программы - это конечное множество программных правил.

1.4.2. Общая программа - это конечное множество общих программных правил.

1.4.3. Расширенная программа- это конечное множество расширенных программных правил.

Обозначим множество всех основных примеров всех правил расширенной программы P через ground(P).

Другие определения вводятся по ходу изложения. Необходимые понятия логического программирования читатель может найти в [1], [6], [12].

Пример 1.1. Рассмотрим следующие расширенные программные правила:

r1. Кубик(a) $\Leftarrow$

r2. Кубик(b) $\Leftarrow$

r3. На-столе(a) $\Leftarrow$

r4. На-столе(x) $\Leftarrow$ На-столе(y), на(y,x)

r5. На(b,a) $\Leftarrow$

r6. Доступен(x) $\Leftarrow$ Кубик(x), На-столе(x), $\neg$на(y,x)

r7. Доступен(x) $\Leftarrow$ (На-столе(x) $\rightarrow$ Кубик(x)), $\neg$на(x,y)

r1, r2,..., r5 являются программными правилами. r1, r2,..., r6 являются общими программными правилами. Любое непустое подмножество множества {r1,r2,r3,r4,r5} является программой. Любое непустое подмножество множества {r1,r2,...,r6} является общей программой. Расширенная программа представляет собой любое непустое подмножество множества рассмотренных здесь расширенных программных правил.

Программы имеют три типа семантики, которые мы кратко изложим ниже, поскольку они помогут лучше понять построенную нами семантику расширенных программ и процедуру вычисления по этим программам.

a). Теоретико-модельная семантика программ.

Рассмотрим программу P. Каждое программное правило

$$R \Leftarrow B_1,...,B_m$$

из P понимается как сокращение для формулы

$$\forall x_1 ... \forall x_n (B_1 \& ... \& B_m \supset R) \qquad (1)$$

где $x_1,...,x_n$ - все входящие в это программное правило переменные.

Правило $R \Leftarrow B_1,...,B_m$ интерпретируется следующим образом: если $B_1\delta,...,B_m\delta$, где δ - некоторая основная подстановка, истинны, то истинна $R\delta$.

Моделью программы P называется любая интерпретация I такая, что для всякого программного правила

$$R \Leftarrow B_1,...,B_m$$

из P и для всякой основной подстановки δ, если $B_1\delta \in I, B_2\delta \in I, ..., B_m\delta \in I$, то $R\delta \in I$.

b). Семантика неподвижных точек.

Пусть дана программа P. Ground(P) - множество всех основных примеров всех ее правил. Определим ассоциируемую с P функцию Tp следующим образом :

$$Tp: \mathcal{P}(HB) \rightarrow \mathcal{P}(HB)$$

Для всякого основного атома A и всякой эрбрановской интерпретации I: $A \in Tp(I)$ тогда и только тогда, когда в ground(P) существует правило $A \Leftarrow B_1,...,B_m$ и $B_i \in I$ для всякого $i \in \{1,...,m\}$.

Таким образом, функция Tp превращает одни эрбрановские интерпретации в другие. Tp непрерывна на полной решетке $<\mathcal{P}(HB), \subsetneq>$ и монотонна.

Для монотонной функции T на некоторой полной решетке $<M, \subsetneq>$ мощность T определяется следующим образом :

$T\uparrow 0(I) = I$ где $I \subsetneq M$,

$T\uparrow \alpha(I) = T(T\uparrow(\alpha\text{-}1)(I))$, если α - следующий ординал,

$T\uparrow \alpha(I) = \cup_{\delta<\alpha} T\uparrow \delta(I)$, если α - предельный ординал

Мы пищем $T\uparrow\omega$ вместо $T\uparrow\omega(\varnothing)$.

Имеет место следующая теорема (см.,например [10],[12])

Теорема 1.1. Если T - непрерывная функция на полной решетке $<M, \subsetneq>$ то $T\uparrow\omega = \mathrm{lfp}(T)$, где lfp(T) обозначает наименшую неподвижную точку функции T.

Ван Эмден и Ковальский доказали следующие факты относительно позитивных программ:

Теорема 1.2. (Ван Эмден, Ковальский).

Пусть P - программа. Тогда имеют место следующие предложения:

1.2.1. P имеет эрбрановскую модель. Пересечение Mp всех эрбрановских моделей P тоже является эрбрановской моделью P.

1.2.2. Mp есть наименьшая эрбрановская модель P.

1.2.3. $Mp = Tp\uparrow\omega = \mathrm{lfp}(T)$.

Из определения функции Tp и теоремы 1.2. видно, что можно рассматривать Tp как операцию, применение которой к кортежу основных атомов $B_1\delta, \dots, B_m\delta$ дает результат $R\delta$ в случае, когда в программе P существует правило $R \Leftarrow B_1, \dots, B_m$ (т.е. в ground(P) существует правило $R\delta \Leftarrow B_1\delta, \dots, B_m\delta$). Каждый атом главной модели Mp получается применением Tp, а стало быть, применением правил из P за конечное число шагов. Именно поэтому семантика неподвижных точек играет роль своего рода посредника между теоретико - модельной и изложенной ниже процедурной (операционной) семантикой.

с). Операционная (процедурная) семантика.

Правило $R \Leftarrow B_1, \dots, B_m$ означает следующее:

Чтобы доказать $R\delta$, сначала надо доказать $B_1\delta, \dots, B_m\delta$, где δ - некоторая основная подстановка. Таким образом, задача сводится к подзадачам. Это и лежит в основе процедурной семантики логического программирования. Процесс вычисления состоит в следующем.

Пусть даны программа P и запрос $Q = \Leftarrow L_1,...,L_n$ $(n \geq 0)$. Вычисление начинается с выбора одного из позитивных литералов $L_1,...,L_n$. Пусть выбран литерал $L_i = R(t_1,...,t_k)$. Недетерминистически выбирается программное правило

$$R(t'_1,...,t'_k) \Leftarrow L'_1,...,L'_m$$

Если $R(t_1,...,t_k)$ и $R(t'_1,...,t'_k)$ неунифицируемы, то эта ветвь вычисления завершается и выбирается другое правило с предикатом R в головке. Если такое правило существует, то указанный шаг повторяется. Если же такого правила нет, то вычисление заканчивается неудачей. Если L_i и $R(t'_1,...,t'_k)$ унифицируемы, то исходный запрос заменяется запросом

$$\Leftarrow \{L_1 \& ... \& L_{i-1} \& L'_1 \& ... \& L'_m \& L_{i+1} \& ... \& L_n\}\delta,$$

где δ - наибольшим унификатором L_i и $R(t'_1,...,t'_k)$. Независимо от того, унифицируемы L_i с $R(t'_1,...,t'_k)$ или нет, после описанного шага программа отыскивает новое правило с предикатом $R(s_1,...,s_k)$ в головке для продолжения вычисления в случае, когда L_i и $R(t'_1,...,t'_k)$ неунифицируемы и для нахождения новых ответов в том случае, если унифицируемы L_i и $R(t'_1,...,t'_k)$. Этот процесс вычисления продолжается до тех пор, пока исходный запрос еще не стал пустым.

Пусть $\delta 1,...,\delta n$ есть последовательность унифицируемых подстановок в успешном вычислении некоторого запроса Q. Пусть δ есть композиция $\delta = \delta 1 \delta 2 .. \delta n$ этих унифицируемых подстановок. Подмножество δ, которое дает подстановку для переменных запроса Q, будучи расширенным добавлением тождественной идентичной подстановки для переменных Q, не подвергающихся действию δ, и есть данный вычислением ответ. Если Q не содержит переменных, ответом является истина. С другой стороны, если каждая ветвь вычисления заканчивается неудачей, то ответом будет ложь.

Построить столь же простые, хорошие семантики с общими программами уже невозможно.

Заметим, что программа всегда имеет модель (к примеру, множество HB является моделью для любой программы) поэтому невозможно получить из нее негативный факт. Для вычисления по общим программам Кларк предложил правило "отрицание как неудача" (см.[10]). Эту процедуру обозначим через QEP. Она отличается от изложенной выше процедуры вычисления тем, что содержит процедуру обработки негативного литерала.

Негативный литерал, содержащий переменные, не может быть избран для обработки. Если же негативный литерал $L_i = \neg R$ выбран, то вычисление L_i заключается в попытке выяснить, можно ли доказать $\neg R$ как некоторую лемму. Для этого мы начинаем новый процесс вычисления с $\Leftarrow R$ в качестве запроса.

Если вычисление $\Leftarrow R$ успешно, $\neg R$ не доказана и вычисление исходного запроса безуспешно.

Если вычисление $\Leftarrow R$ безуспешно в каждой его ветви, то $\neg R$ доказана как лемма. Следовательно, исходный запрос заменяется запросом

$$\Leftarrow L_1 \& \ldots \& L_{i-1} \& L_{i+1} \& \ldots \& Ln.$$

Вычисление запроса из программы P по процедуре, в которой используется правило "отрицание как неудача", может быть представлено в виде дедуктивного вывода этого запроса из изложенного ниже замыкания программы .

Пусть дана программа P. Трансформируем каждое правило программы P

$$R(t_1,\ldots,t_n) \Leftarrow B_1,\ldots,B_m$$

в формулу

$$R(x_1,\ldots,x_n) \Leftarrow \exists y_1 \ldots \exists y_q (x_1 = t_1 \& \ldots \& x_n = t_n \& B_1 \& \ldots \& B_m) \quad (1)$$

где $x_1,\ldots, x_n$ - новые, не входящие в $t_1,\ldots, t_n$, $B_1,\ldots, B_m$ переменные, $y_1,\ldots, y_q$ - все входящие в $t_1,\ldots, t_n$, $B_1,\ldots, B_m$ переменные.

Соберем все полученные после этого формулы с атомами $R(x_1,\ldots,x_n)$ в головке. Допустим, что их всего $k > 0$.

Тогда формула

$$\forall x \ldots \forall x_n (R(x_1,\ldots,x_n) \Leftrightarrow E_1 \vee \ldots \vee E_k) \quad (2)$$

называется *определением предиката R, данным программой P*. Здесь $E_1,\ldots,E_k$ - выражения, находящиеся справа от знака $\forall\Leftarrow$" в упомянутых выше k формулах вида (1).

Если $k = 0$, т.е. в P нет правила с предикатом R в головке, то определение предиката R, данное программой P, есть формула

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (R(x_1,\ldots,x_n) \Leftrightarrow \perp).$$

Теория равенства E_q задана следующими аксиомами:

1. $f(x_1,\ldots,x_n) = f(y_1,\ldots,y_n) \Leftrightarrow (x_1 = y_1) \& (x_n = y_n)$ для каждой *n*-местной функции f.

2. $f(x_1,\ldots,x_n) \neq g(y_1,\ldots,y_m)$ для каждой *n*-местной функции f и *m*-местной функции g, таких, что $f \neq g$.

3. $x \neq t$ для каждой переменной x и каждого терма t, таких, что $x \not\equiv t$ и x входит в t.

Замыкание программы P (Comp(P)) есть совокупность всех определений всех предикатов, данных программой P, вместе с теорией равенства Eq.

Разъясним смысл замыкания программы. Каждое правило в программе "говорит" о предикате, содержащемся в его головке. Формула вида (1) эквивалентна исходному правилу. Соберем все правила в программе, "говорящие" о предикате R, а вернее - соответствующие им формулы вида (1). Тогда выражение, стоящее справа от знака $\Leftarrow$ в каждой такой формуле является достаточным условием для $R(x_1,...,x_n)$. Этот факт можно выразить формулой:

$$\forall x_1 ... \forall x_n (R(x_1,...,x_n) \Leftrightarrow E_1 \vee ... \vee E_k)$$

Замыкание программы P предпологает, что эти достаточные условия для R вместе с тем являются для R и необходимыми. В результате мы получим определение предиката R, данное программой P. Если в программе нет правила с предикатом R в головке, т.е. нет правил, которые "говорят" о R, то замыкание программы объявляет, что этот предикат всегда ложен. Заметим, что в аксиомах теории равенства Eq содержится так называемая аксиома единственности имени: разные имена обозначают разные предметы.

2.Семантика неподвижных точек

Рассмотрим класс расширенных программ, правила которых имеет следующий вид:

$$R \Leftarrow B_1, B_2, ..., B_m \quad m \in N, m \geq 0$$

где R - атом, B_i есть литерал или формула вида $q \to r$, где q - позитивный литерал, r - литерал.

Для построения семантики неподвижных точек программ рассматриваемого класса мы опираемся на построенные Е. К. Войшвилло натуральные релевантные системы с характеристиками зависимости (см.[2],[3]) и на предложенную В. А. Смирновым реализуемую на компьютере процедуру построения натурального вывода (см.[5]).

Мы поставили перед собой задачу построить релевантную семантику неподвижных точек расширенных программ вышеназванного класса, которая максимально сходна с семантикой неподвижных точек программ, изложенной в первой части статьи. Семантика здесь называется релевантной, поскольку знак "$\rightarrow$" входит в тела правил в программах и понимается как релевантная импликация. В этой семантике кроме релевантной импликации имеет место отрицание как неудача.

Определение 2.1.

Отмеченные формулы языка $c\mathcal{L}$ есть выражения вида TX и FX, где X - формула , а T и F - два новых символа, которые интуитивно представимы как истина и ложь.

Отмеченные формулы с характеристикой зависимости языка $\mathcal{L}$ есть выражения вида TX[Г] и FX[Г], где TX и FX - отмеченные формулы $\mathcal{L}$, а Г - последовательность формул. Формулы с характеристикой зависимости имеют вид X[Г], где X - формула, Г - последовательность формул.

Определение 2.2.

Интерпретацией называется любое множество отмеченных формул с характеристикой зависимости.

Отметим, что любая отмеченная формула является отмеченной формулой с характеристикой зависимости. В этом случае последовательность Г пуста. Эти формулы мы называем также *чистыми отмеченными формулами*.

Определение 2.3.

Интерпретация I выполняет высказывание A, если A истинно в I. Интерпретация I отвергает высказывание A, если A ложно в I.

Формально: Пусть I выполняет A и отвергает A обозначаются соответственно через $I \models A$ и $I \not\models A$.

2.3.1. Для основного атома p_i

$I \models p_i[\Gamma] \Leftrightarrow Tp_i[\Gamma] \in I$, $I \not\models p_i[\Gamma] \Leftrightarrow Fp_i[\Gamma] \in I$

2.3.2. $I \models A \& B \Leftrightarrow I \models A$ и $I \models B$

2.3.3. $I \not\models A \& B \Leftrightarrow I \not\models A$ или $I \not\models B$

2.3.4. $I \models A \vee B \Leftrightarrow I \models A$ или $I \models B$

2.3.5. $I \not\models A \vee B \Leftrightarrow I \not\models A$ и $I \not\models B$

2.3.6. $I \models \neg A \Leftrightarrow I \not\models A$

2.3.7. $I \not\models \neg A \Leftrightarrow I \models A$

2.3.8. $I \models A \rightarrow B \Leftrightarrow I \models B[A]$

2.3.9. $I \not\models A \rightarrow B \Leftrightarrow I \not\models B[A]$

2.3.10. $I \models A \supset B \Leftrightarrow I \not\models A$ или $I \models B$

2.3.11. $I \models \forall x A(x) \Leftrightarrow$ для всякой основной подстановки

$I \models A\delta^x$, где δ^x - ограничение δ на переменную x (т.е. $\delta^x = \{x/t\}$ если $x/t \in \delta\}$.

2.3.12. $I \models \exists x A(x) \Leftrightarrow$ для некоторой основной подстановки δ.

$I \models A(x)\delta^x$, где δ^x - ограничение δ на переменную x.

2.3.13. $I \not\models \exists x A x \Leftrightarrow$ для всякой основной подстановки δ

$I \not\models A(x)\delta^x$, где δ^x - ограничение δ на переменную x.

2.3.14. $I \not\models \perp$

2.3.15. $I \models \neg\perp$

2.3.16. $I \models A \Leftrightarrow B$ тогда и только тогда, когда $I \models A \supset B$ и $I \models B \supset A$

Определение 2.4.

Интерпретация выполняет множество высказываний W если она выполняет каждый элемент W.

Определение 2.5.

Интерпретация I выполняет программу P, если для любого правила $R \Leftarrow B_1,...,B_m$

I выполняет формулу

$\forall_{x1}...\forall_{xn}((B_1\&...\&B_m) \supset R)$.

Пусть дана программа P. Определим множество негативных факторов программы P следующим образом: НФК(P)$=\{R\delta$: R-предикат, не входящий в головку ни одного правила P; δ - основная подстановка$\}$.

Множество фактов P (ФК(P)) состоит из всех позитивных и негативных фактов P, т.е. ФК(P)= ПФК(P) $\cup$ НФК(P).

Для определения функции Фр, которая представляет собой операцию, применение которой к ФК(P) дает новые факты, подобно функции Тр, описанной в первой части, сделаем некоторые замечания.

Если запрос имеет вид $\Leftarrow (p \rightarrow q)$, то для его вычисления можно, как в натуральных системах, добавить p в качестве допущения и пытаться выяснить q, следя при этом, чтобы p использовался в вычислении q. Добавление к программе p в качестве допущения аналогично действию аналитического правила введения импликации у В. А. Смирнова. При этом необходимо решить следующие проблемы. Во-первых, проблему наследования характеристики зависимости. Поскольку для нашего примера $\Leftarrow(p \rightarrow q)$, q может не получиться непосредственно из p, а только с помощью r, которая получается из p, то зависимость должна передаваться от одной формулы к другой. Во-вторых, надо следить за тем, чтобы дополнительное допущение p использовалось только для вычисления q и не использовалось для получения других фактов. Вторую проблему можно решить путем создания механизма погашения характиристики зависимости. В том случае, когда некоторое несанкционированное применение допущения имело место, результат не будет очищен от зависимости от этого допущения. Эти проблемы в натуральных релевантных системах, построенных Е. К. Войшвилло, уже получили свои решения. Здесь мы адаптируем эти решения к программам.

Определение 2.6.

Пусть дана расширенная программа интересуещего нас класса P. Тогда ground*(P) получается из ground(P) заменой всех правил вида

$R \leftarrow R_1,...,q \rightarrow r,...,R_m$

парой правил $\{ \; R \leftarrow R_1,...,r[q],...,R_m$

$\quad q[q] \leftarrow \; \}$

и так продолжается до тех пор, пока не получим множество правил вида

$R \leftarrow B_1[\Gamma_1],...,B_m[\Gamma_m]$

где Г - последовательность формул, возможно пустая, R_1, R_2,...,R_m - литералы, а R - атом.

Пример 2.1

Программа P	Ground*(P)
$\{ \; r \leftarrow (q \rightarrow p)$	$\{ \; r \leftarrow p[q]$
$u \leftarrow$	$u \leftarrow$
$w \leftarrow q,u$	$w \leftarrow q,u$
$p \leftarrow w \; \}$	$p \leftarrow w$
	$q[q] \leftarrow \; \}$

Функция Фр на полной решетке $<M,\subseteq>$, где M - множество всех подмножеств множества всех отмеченных основных атомарных формул с характеристиками зависимости определяется следующим образом:

Определение 2.7

Для каждого основного атома с характеристикой зависимости $A[\{B_1,...,B_m\}-\{C_1,...,C_m\}]$, где C_i, B_j, $(i, j \in N)$ могут быть пустыми:

$TA[\{B_1,...,B_m\}-\{C_1,...,C_m\}] \in$ Фр(I) тогда и только тогда, когда имеет место по крайней мере одно из двух следующих условий:

a) В ground*(P) существует правило

$A \leftarrow R_1[B_1],...,R_m[B_m]$

и $I \models R[C_1],\dots, I \models R[C_m]$;

b) В $ground^*(P)$ существует правило

$A[\{B_1,\dots,B_m\}-\{C_1,\dots,C_m\}] \Leftarrow$.

$FA[\Gamma] \in Фр(I)$ тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: для всякого правила

$A \Leftarrow R_1[B_1],\dots,R_m[B_m]$

$I \not\models R_i[B_i]$ для некоторого $i \in \{1,2,\dots,m\}$ и $B_i = \Gamma$.

Пример 2.2

Для программы P из приведенного ранее примера 2.1 мы имеем:

$Фр \uparrow 1(\varnothing) = Фр \uparrow 1 = \{q[q],u\} \cup НФК(P)$

$Фр \uparrow 2 = \{q[q],u,w[q]\} \cup НФК(P)$

$Фр \uparrow 3 = \{q[q],u,w[q],p[q]\} \cup НФК(P)$

$Фр \uparrow 4 = \{q[q],u,w[q],p[q],r\} \cup НФК(P)$

$Фр \uparrow 5 = Фр \uparrow 6 = Фр \uparrow 7 = \dots = Фр \uparrow \omega$,

где НФК(P) есть множество негативных фактов, вычислимых по программе P.

Нетрудно показать, что Фр имеет следующие свойства:

Теорема 2.1.

2.1.1. Фр монотона

2.1.2. Фр непрерывна на решетке $<M, \subseteq>$

2.1.3. $Фр \uparrow \leq\omega = lfp(Фр)$

Необходимо обратить внимание на то, что множество фактов, полученных вычислением по программе P за k шагов, представляет собой только подмножество $Фр \uparrow k(\Phi)$. Если такое множество фактов обозначается через $Фр_* \uparrow k(\Phi)$, то верно следующее предложение:

Предложение 2.2.

$Фр_* \uparrow k(\varnothing) = Фр_* \uparrow k = \{A[\Gamma]:A[\Gamma] \in Фр \uparrow k\}$, где Г-пустая последовательность формул.

Иными словами, $Фр_* \uparrow k$ представляет собой подмножество всех чистых формул множества $Фр \uparrow k$.

В дальнейшем мы будем использовать запись $Фр_* \uparrow n(I)$ для обозначения подмножества чистых формул множества $Фр \uparrow n(I)$.

Заметим, что не смотря на то, что $Фр^*$ монотона и непрерывна на $<M,\subseteq>$, нельзя определить мощность $Фр^*$, так как $Фр^*(Фр^*(I))$ определяется через $Фр(Фр(I))$ и не может быть определено через $Фр(I)$.

Множество $Фр_* \uparrow \omega$ представляет собой множество всех фактов, вычислимых по программе P.

Сформулируем еще две важных теоремы:

Теорема 2.2. Для всякой основной интерпретации I, $I \models Comp(P)$ тогда и только тогда, когда I есть неподвижная точка функции Фр.

Теорема 2.3.

Пусть $Comp(P) \models A$ означает, что для всякой интерпретации I, если $I \models Comp(P)$, то $I \models A$. Тогда для всякого основного литерала A верно:

$$Comp(P) \vdash_{rel} A, \text{ если и только если } Comp(P) \models A$$

Доказательства этих теорем не вызывают принципиальных трудностей, но они очень длинны, и поэтому мы их здесь не излагаем.

3. Процедура вычисления для расширенных программ

Поскольку в тела правил в расширенных программах могут входить не только литералы, но и формулы других видов, в том числе и бескванторные формулы вида $A \to B$ и вида $A \vee B$, процедура вычисления QEP не годится для вычисления по этим программам. Необходимо расширить QEP так, чтобы можно было вычислить запросы вида $\Leftarrow(A \to B)$, вида $\Leftarrow(A \vee B)$ и вида $\Leftarrow(A \,\&\, B)$.

Теоретические основания.

1. Запрос вида $\Leftarrow(A \,\&\, B)$ всегда можно представить в виде $\Leftarrow A,B$, и поэтому не требуется изменения QEP.

2. Рассмотрим запрос вида $\Leftarrow A \vee B$.

Для вычисления этого запроса Боджадзиен предлагает в [8] следующий метод: добавить к исходной программе два новых правила

$$(A \vee B) \Leftarrow A$$

и

$$(A \vee B) \Leftarrow B$$

В этих правилах $A \vee B$ рассматривается как предикат, т.е. как один литерал. После этого запрос $\Leftarrow A \vee B$ уже рассматривается как запрос $\Leftarrow E$, где E - новый, не использованный в исходной программе литерал (позитивный).

Рассмотрим запрос вида $\Leftarrow(A \to B)$.

Импликация здесь релевантная.

Е. К. Войшвилло построил натуральную систему с характеристикой зависимости, которая эквивалента аксиоматической системе EQ, и доказал следующее: в EQ формула $A \to B$ доказана, если можно доказать B при допущении A, при этом в доказательстве допущение A использовано фактически (см. в [3]). Это обстоятельство подсказывает нам метод вычисления запроса вида $\Leftarrow(A \to B)$. Чтобы вычислить $\Leftarrow (A \to B)$, добавим к исходной программе правило $A \Leftarrow$, затем попытаемся доказать B, пользуясь фактом A. Если это удается, то вычисление $\Leftarrow (A \to B)$ заканчивается успешно. В противном случае оно закончится неудачей или продолжается бесконечно.

Процедура вычисления EXQEP.

Мы опишем процедуру вычисления для ограниченного класса расширенных программ, а именно, для расширенных программ, представляющих собой конечное множество правил вида

$$R \Leftarrow B_1,...,B_m,$$

где R - атом, $B_1,...,B_m$ - литералы или формулы вида $C_1 \vee C_2$, $C_1 \to C_2$, где C_1 и C_2 - атомы.

Такое ограничение вводится по соображениям эффективности вычисления. Дело в том, что если в программе имеются правила других видов, то может возникнуть ситуация, когда к программе в процессе вычисления необходимо добавить правила вида

$$R \Leftarrow B_1,...,B_m,$$

где R- формула вида $A \vee B$ или $A \to B$. Вычисление же по программе, полученной в результате этого, неэффективно.

Новая процедура вычисления - обозначим ее через EXQEP - представляет собой расширение процедуры QEP. Если выбранная формула есть литерал, то EXQEP действует также, как и QEP. Опишем случай, когда выбранная формула есть $A \vee B$, где A - позитивный литерал, а B - литерал.

Случай 3. L_i есть формула вида $A \vee B$, где A и B - литералы. Пусть $A \vee B = \mid R_1(t_1,...,t_k) \vee \mid R_2(s_1,...,s_l)$, где $\mid R_i$ есть R_i или $\neg R_i$. Заменим все формулы вида $\neq R_1(t'_1,...,t_k) \vee \neq R_2(s'_1,...,s'_l)$ в программе литералом $R_3(t'_1,...,t'_k, s'_1,...,s'_l)$, где R_3 - новый, не входящий в исходную программу, предикат. Добавим к программе два новых правила:

$$R_3(t'_1,...,t'_k, s'_1,...,s'_l) \Leftarrow A \quad (1)$$
$$R_3(t'_1,...,t'_k, s'_1,...,s'_l) \Leftarrow B \quad (2)$$

Тогда вычисление $\Leftarrow A \vee B$ сводится к вычислению запроса $\Leftarrow R_3(t_1,...,t_k,s_1,...,s_l)$ по полученной в результате этого программе. Затем удалим из программы правила (1) и (2) и осуществим обратную замену литералов $R_3(t'_1,...,t'_k,s'_1,...,s'_l)$ формулами $\mid R_1(t'_1,...,t'_k) \vee \mid R_1(s'_1,...,s'_l)$ и в программе и в запросе.

Случай 4. L_i есть формула вида $A \rightarrow B$, где A - позитивный литерал, B - литерал. Добавим к программе новое правило $A \Leftarrow$.

Теперь проблема сводится к случаю 1 (см. первый раздел данной статьи), когда L_i есть позитивный литерал, или к случаю 2, когда L_i есть негативный литерал: полагая, что выбранная формула L_i есть литерал B, мы пытаемся вычислить B по программе, полученной в результате добавления нового правила к исходной программе. При этом важно отметить, что мы учитываем только те ветви, в которых используется правило $A \Leftarrow$. Если существует такое успешное вычисление B, то вычисление $A \rightarrow B$ считается успешным с той же ответной подстановкой, что дает вычисление B. Затем удалим из программы правило $A \Leftarrow$, а исходный запрос заменяется запросом

$$\Leftarrow L_1\delta,\ldots,L_{i-1}\delta,L_{i+1}\delta,\ldots,L_n\delta$$

где δ - ответная подстановка, которую дает вычисление B, в котором используется правило $A \Leftarrow$. Если все ветви вычисления B, в которых применяется правило $A\Leftarrow$, заканчиваются неудачей, то вычисление $A \rightarrow B$ заканчивается неудачей, и вычисление исходного запроса заканчивается неудачей. Если же одна из этих ветвей бесконечна, а другие заканчиваются неудачей, то вычисление $A \rightarrow B$ и исходного запроса бесконечно.

4.Заключение

В изложенных выше семантике и процедуре вычисления совместимы "отрицание как неудача" и релевантная импликация. Нетрудно заметить, что если в системе будет классическая импликация, то соответствующая процедура вычисления, (отличающаяся от нашей EXQEP только тем, что в ней независимо от того, используется факт A в вычислении B или нет, вычисленние $A \rightarrow B$ считается успешным при успешности вичисления $B\Leftarrow$), содержит в себе известные парадоксы материальной импликации. Этот факт приводит нас к мысли о том, что логическое программирование должно базироваться на релевантной логике.

Литература

1. *Агафонов В. Н., Боршев В. Б., Воронков А. А.* Логическое программирование в широком смысле (обзор)// Логическое программирование. Сборник пер. М., 1983. С. 298-336.

2. *Войшвилло Е. К.* Натуральные варианты некоторых релевантных систем // Логический вывод. М., 1979. С.69-117.

3. *Войшвилло Е. К.* Философско-метологические аспекты релевантной логики. М., 1988.

4. *Смирнов В. А.* Поиск доказательства (глава книги "Логика и Компьютер"). М., 1990. С. 158-183.

5. *Фам Динь Нгьем* Методологические основы логического программирования (анализ на основе релевантной логики) Дис. канд. филос. наук. М., 1991.

6. *Apt K. R.* Introduction to logic programming (revised and extended version)// Technical report CS-R8826. Centre for Mathematics and Computer Science. Amsterdam, 1989.

7. *Apt K. R.* and Van Emden M.N. Contributions to the theory of Logic programming // J. of ACM. 1982. Vol. 29, №.3. P. 841-862.

8. *Bozadziel D. A.* Constructive view of PROLOG // J. of logic programming. 1986. Vol.3, № 1. P. 69-74.

9. *Clark K. L.* Negation as failure // Logic and database (Gallaire H. and Minker J, eds.). N.Y., 1978. P. 293-322.

10. *Van Emden M. H. and Kowalski R. A.* The semantics of predicate logic as a programming language //JACM. 1976. Vol. 23, № 4. P. 733-742.

11. *Fitting M.* Partial Models and logic programming // Theoretical Computer Science. 1986. Vol. 48, P. 229-255

12. *Lloyd J. W.* Foundation of Logic programming. Springer Verlag, Berlin, 1984.

Г.П.Дишкант

О ЛОГИКЕ ФИЗИКИ

Классическая логика, а с ней и вся классическая математика, могут быть изложены с помощью одной "величины" - истинности высказывания. Эта величина может принимать только одно из двух значений: истина - 1, ложь - 0. В тоже время физика обычно оперирует с величинами, могущими принимать любое действительное значение. В этой связи естественно возникает задача построения такой (неклассической) логики, где значение истинности высказывания может оказаться действительным числом. Обсуждению одного из возможных путей решения этой задачи и посвящена настоящая работа.

Упомянутая возможность связывается нами с философскими исследованиями единства массы, пространства и времени [1]. Эти исследования приводят к необходимости одновременного существования двух миров. Первый мир есть мир количеств и качеств, в нем можно различать массы, пространство и время, он был назван в индийской манере - SAGUNA. В то время как первый мир легко проявляется, "манифестирует" себя, второй мир представляет собой скрытую меру первого. В нем нет ни пространства, ни времени, ни массы. В индийской манере он был назван NIRGUNA.

Уместно напомнить, что классическая логика обычно исходит из неявного предположения о существовании только одного действительного мира. Правда, в различных модальных расширениях классической логики наряду с действительным миром рассматриваются также и другие миры, но последние являются лишь возможными, но не действительными. Философское обоснование тезиса о действительном существованиии двух миров означает одновременное отрицание классической логики и открывает путь к выдвижению неклассической логики.

Приступая к решению поставленной задачи, в целях "униформизации", мы предположим, что каждая физическая величина измеряется прибором, имеющим шкалу и стрелку. В таком случае значение физической величины можно характеризовать некоторой вероятностью, а именно, вероятностью того, что случайно выбранная точка лежит левее стрелки прибора. Разумеется, указан ная вероятность была бы равна нулю если бы значение физической величины было бы равно нулю. Но мы здесь ограничимся случаем физических величин, принимающих только строго положительные значения. Поэтому указанная вероятность по предположению всегда больше нуля. Разумеется, эта вероятность равна 1, если физическая величина принимает значение, максимально допустимое для данного прибора. Мы будем всегда также предполагать, что приборы никогда не зашкаливают.

Проведенная униформизация позволяет теперь заменять высказывания о значениях физических величин высказываниями о наличии этих величин. Например, если манометр имеет шкалу размахом в 100 атмосфер, то вместо обычного в физике высказывания "давление в сосуде равно 70 атмосфер" мы можем использовать утверждение о том, что вероятность высказывания " в сосуде (имеется) давление" равна 0,7. Вообще, если с* будет некоторой физической величиной, то соответствующее высказывание о наличии этой величины будем обозначать просто через с. P(c) будет, как обычно, вероятность высказывания.

Перейдем к формальному описанию нашей логики LP. Язык для LP - это язык пропозициональной логики, где ν - множество пропозициональных пременных, а из связок имеются коньюнкция & и отрицание ¬. Формулы строятся обычным путем и образуют алгебру $F=\langle F^0,\&,\neg,\varnothing\rangle$. Отклоняясь от традиции, мы допускаем здесь пустую формулу $\varnothing$, не содержащую ни одного символа. При этом предполагается, что $\neg\varnothing$ графически равно $\varnothing$, а $\varnothing\&x$ и $x\&\varnothing$ равны x при любой формуле $x\in F^0$.

Будем пользоваться также импликацией $\Rightarrow$ как сокращенным обозначением, полагая что $x\Rightarrow y$ графически равно $\neg x\&y$. Описание нашей логики дадим в трех эквивалентных формах.

Определение 1: исчисление. Правила преобразования LP содержат одну аксиому и два правила вывода:

A. $x\&(y\&z)\Rightarrow(y\&x)\&z$,

B. $x\&y, z\Rightarrow y\vdash x\&z$,

C. $x\&x\&...x\vdash x$.

Здесь $x,y,z \in F0$, знак $\vdash$ означает выводимость в LP и в правиле C слева стоит коньюнкция $n \geq 2$ одинаковых формул. Как обычно, для любого списка нелогических аксиом $\Gamma \in F^0$ и любой формулы $x \in F^0$ запись $\Gamma \vdash x$ означает, что формула x выводима из множества формул Γ.

Чтобы освоится с нашим исчислением установим несколько фактов.

P1. $\vdash x\&y \Rightarrow y\&x$

P2. $\vdash x \Rightarrow x$

P3. $x \Rightarrow y \vdash y \Rightarrow x$

P4. $x \Rightarrow y,\ y \Rightarrow z \vdash x \Rightarrow z$

P5. $x,\ x \Rightarrow y \vdash y$ (Modus Ponens)

P6. $x\&y \vdash y\&x$

P7. $x \Rightarrow y \vdash \neg x \Rightarrow \neg y$

P8. $\vdash \neg\neg x \Rightarrow x$

P9. $x \Rightarrow y \vdash z\&x \Rightarrow z\&y$

P10. $x \Rightarrow y \vdash x\&z \Rightarrow y\&z$

Действительно, P1 и P2 суть A, где некоторые из подформул пустые.

Вот вывод P3: $\neg y\&y$ (по P2), $x \Rightarrow y$ (дано), $\neg y\&x$ (B).

Вот доказательство P4: $\neg x\&y$, $\neg y\&z$ (даны), $\neg z\&y$ (P3), $\neg x\&z$(B).

P5: $\varnothing\&x$, $x \Rightarrow y$, $y \Rightarrow x$, $\varnothing\&y$.

P6 может быть доказано с помощью P1 и P5.

Вот доказательство P7: $\neg\neg x\&\neg x$(P2), $\neg x\&\neg\neg x$(P6), $\neg\neg x \Rightarrow x$(P3), $\neg x\&y$(P3), $\neg x\&y$ (дано), $\neg y\&x$ (P3), $\neg y\&\neg\neg x$(B), $\neg\neg x\&\neg y$(P6).

P8: $\neg x \Rightarrow \neg x$ (P2), $\neg x\&\neg\neg x$(P6), $\neg\neg x \Rightarrow x$(P3).

Вот доказательство P9: $(z\&x)\&\neg(z\&x)$ (по P2, P6), $x\&(z\&\neg(z\&x))$ (по A, P5), $\neg\neg x \Rightarrow x$(P8), $\neg\neg x\&(z\&\neg(z\&x))$ (B), $z\&\neg(z\&x) \Rightarrow \neg x$(P3), $\neg x\&y$ (дано), $(z\&\neg(z\&x))\&y$(B), $\neg(z\&x)\&(z\&y)$ (A, P5).

Доказательство P10 аналогично.

Определение 2: истинностная оценка. Морфизм μ: $F \to R^+$, где $R^+ = \langle R^0, \circ, ^{-1}, 1 \rangle$ - мультипликативная группа положительных действительных чисел, $R^0 = (0, +\infty)$, $\bullet$ - операция умножения чисел, и $^{-1}$ - операция обращения числа, назовем оценкой. Если $\mu(x) = 1$, то мы будем говорить, что формула x истинна в оценке μ. Мы пишем Г $\mapsto$ x, если $\mu(x)=1$ для любого $y \in Г$.

Комментарий 1. Оценка высказывания называется также его значением истинности, а не только 0 и 1, как в классической логике. В дальнейшем мы будем называть высказывания x и y эквивалентными и писать $x \equiv y$, если $\mu(x) = \mu(y)$ при любой оценке μ.

Легко заметить, что в LP $\neg(x\&y\&...) \equiv \neg x\& \neg y\&...$
таким образом, наше отрицание $\neg$ есть внутреннее отрицание *de re*. Именно это отрицание было использовано в [1], где утвеждалось, что в мире NIRGUNA $\neg$(масса & пространство & время) есть некоторое четвертое, а именно, $\neg$масса & $\neg$пространство & $\neg$время. Наше отрицание отличается от обычного отрицания *de dicto* классической логики ~. $\neg$"король хорош" означает, что король плох, в то время как ~"король хорош" означает только то, что неверно, что король хорош. Различие станет ясным, если предположить, что "хорош" означает "смел & честен &...". Тогда "плох" означает "труслив & лжив &...", в то время как ~"хорош" означает "труслив или лжив или...". Для полноты уяснения обратимся теперь к логике обыденной жизни. Кога мы отрицаем, что король хорош, то обычно имеем в виду, что он обладает некоторым существенным набором отрицательных качеств. Здесь можно отметить два крайних случая. В первом достаточно, если этот существенный набор содержит хоть одно качество. Тогда мы имеем дело с классическим отрицанием *de dicto*. Во втором случае существенный набор составляют все качества, и мы получаем наше неклассическое отрицание *de re*.

Дизъюнкция $\vee$ может быть определена как обычно, если положить, что $x \vee y$ означает $\neg(\neg x\& \neg y)$. Однако легко найти, что $x \vee y \equiv x\&y$. В логике с отрицанием *de re* дизъюнкция совпадает с коньюнкцией. Именно по этой причине мы определили импликацию не как $\neg x \vee y$, а сразу как $\neg x\&y$.

Определение 3: МОДЕЛЬ (в стиле Крипке). Назовем пару {P1, P2} функций P: $F^0 \to (0, 1]$, k=1, 2 моделью, если выполняются следующие условия для любых x, $y \in F$ k, m=1, 2: K0 $Pk(\varnothing)=1$
K1. если $k \neq m$, то $Pk(\neg x)=Pm(x)$
K2. $Pk(x\&y)=Pk(x)Pk(x)Pk(y)$
Назовем формулу x истинной в модели {P1, P2} если $P1(x)=P2(x)$. Мы пишем Г $\vdash$ x, если x истинно во всякой модели, в которой каждое $y \in Г$ истинно.

Комментарий 2. Интуитивно P_1 и P_2 суть вероятности в SAGUNA и NIRGUNA соответственно. Условие K0 означает, что пустое высказывание $\varnothing$ истинно в любом мире. Условие K_1 есть точная форма тезиса, что в NIRGUNA "все наоборот". Это означает, что если некоторое утверждение x вероятно в одном из миров, то утверждение $\neg x$ в такой же степени вероятно в другом мире. Условие K_2 означает, что случайные точки возникают на циферблатах приборов независимо в смысле теории вероятностей.

Пусть c есть высказывание "Физическая величина c^* наличествует". Тогда $P_1(c)$ имеет "приборный" смысл, определенный выше. Поэтому $P_1(\neg c)$ есть вероятность того, что "прибор не фиксирует наличие физической величины c^*". Иными словами, это есть вероятность того, что отклонение стрелки прибора меньше минимального деления шкалы этого прибора. Отсюда следует, что $P_1(c)/P_1(\neg c)$ есть значение физической величины c^*.

Условие $P_1(x)=P_2(x)$ означает, в силу K1, что $c^*=1$, если за единицу измерения принять цену наименьшего деления шкалы прибора.

Условие K2 означает, что высказывание x&y можно понимать как утверждение "Физическая величина $x^* \bullet y^*$ наличествует".

Для дальнейшего заметим, что достаточно задать P_1 и P_2 лишь на ν, либо с помощью K0-K2 их легко продолжить на F^0.

Теорема. Условия $\Gamma \vdash x$, $\Gamma \mapsto x$ и $\Gamma \models x$ равносильны.

Доказательство распадается на несколько этапов. Назовем оценку μ и модель $\{P_1, P_2\}$ E-соответствующими, если для любого $x \in F^0$ выполняется условие

E: $m(x)=P_1(x)/P_2(x)$.

Если условие E выполняется для любого $x \in \nu$, то оно выполняется и для любого $x \in F^0$. Проверка проводится тривиальной рекурсией по длине формулы x. Если x есть $\neg y$, то

$$\mu(x)=\mu(\neg y)=(\mu(y))^{-1} = P_2(y)/P_1(y)=P_1(\neg y)/P_2(\neg y)=P_1(x)/P_2(x).$$

Если x есть y&z, то

$$\mu(x)=\mu(y)\mu(z)=(P_1(y)/P_2(y))(P_1(z)/P_2(z))=P_1(x)/P_2(x).$$

И, конечно, $\mu(\varnothing)=P_1(\varnothing)/P_2(\varnothing)$.

Мы видим, что каждой модели E-соответствует одна и только одна оценка, но каждой оценке E-соответствует бесконечное число моделей.

Условия $\Gamma \mapsto x$ и $\Gamma \models x$ равносильны, поскольку равносильны условия $\mu(x)=1$ и $P_1(x)=P_2(x)$. Это есть часть нашей теоремы. Остаток базируется на двух леммах.

Лемма. Условие $\Gamma \vdash x$ равносильно следующему: $h(x)=e$ для любого морфизма $h:F \to G$, где $G=\langle G^0, \circ, ^{-1}, e\rangle$ есть абелева группа без кручения, такого что $h(y)=e$ для любой формулы $y \in \Gamma$.

Доказательство того, что $\Gamma \vdash x$ влечет $h(x)=e$ стандартно: аксиомы отображаются в e и, если посылки правил вывода отображаются в e, то туда же отображаются и заключения.

Для доказательства обратного утверждения достаточно найти такую группу и такой морфизм h_0, что $h_0(x)=e$ влечет $\Gamma \vdash x$. Конечно, алгебра Линденбаума-Тарского может быть такой группой. Для ее конструирования определим отношение эквивалентности $\approx$ на F^0, полагая, что

$x \approx y_{def} = (\Gamma \vdash x \Rightarrow y)$.

Легко заметить, что $\approx$ есть конгруэнтность: оно рефлексивно (P2), симметрично (P3) и транзитивно. Кроме того, в силу P7, P9 и P10 оно совместимо с операциями F.

Далее, $F/\approx$ есть абелева группа без кручения. Действительно, пусть h_0: $F \to F/\approx$ есть натуральнфй морфизм. Так как $\vdash \varnothing \Rightarrow (x\&\neg x)$ и $\vdash \varnothing \Rightarrow (\neg x\&x)$, имеем $h_0(x\&\neg x)=h_0(\neg x\&x)=h_0(\varnothing)$. Это означает, что $\neg/\approx$ есть операция инверсии группы и $\varnothing/\approx$ есть единица группы. Аксиома A дает $h_0(x\&(y\&z))=h_0((x\&y)\&z)$, что есть не что иное как основная аксиома теории абелевых групп. Осталось заметить, что условие $h_0(x)=e$ эквивалентно условию $\Gamma \vdash \varnothing \Rightarrow x$ и условию $\Gamma \vdash x$. Разумеется, схема с обеспечивает отсутствие кручения.

Комментарий 3. Классическая логика связана с булевыми алгебрами. Она представляет собой некоторую логическую их интерпретацию. Только что доказанная лемма показывает, что наша логика PL связана с абелевыми группами без кручения точно таким же образом.

Поразительной особенностью классической логики является то, что она определяется своей связью уже с одной булевой алгеброй, а именно двухэлементной, заданной на множестве {0, 1} (ложь, истина). Вероятно, простота и удобство классической логики во многом определяются простотой этой двухэлементной булевой алгебры. Наша теорема показывает, что с логикой PL дело обстоит примерно так же: она целиком определяется только одной абелевой группой без кручения, а именно - мультипликативной группой положительных действительных чисел $R+$. Возможно, что этот факт объясняет широкую применимость действительных чисел в области естебствознания и физики в особенности. Правда, физики обычно не склонны связывать удобство действительных чисел с какими-либо логическими проблемами.

Алгебраическая лемма. Пусть $G = \langle G^0, \bullet, ^{-1}, e \rangle$ есть некоторая абелева группа без кручения. Тогда для любого ее элемента $x \neq e$ и любого положительного действительного числа $c \in R^0$ существует морфизм $\lambda : G \to R^+$, такой что $\lambda(x) = c$.

Действительно, мусть M - некоторое максимальное множество линейно независимых элементов G. Вследствие максимальности, для любого $x \in G0$ найдется целое число $m \geq 1$ и единственное конечное подмножество $\{v_1, ..., v_s\} \subset M$, такие что $mx = m_1 v_1 + ... + m_s v_s$, где $m_1, ..., m_s$ - некоторые положительные числа. Если $x \neq e$, то $m1 \neq 0$ и мы полагаем $\lambda^*(v_1) = mcm_1^{-1}$ и $\lambda^*(v) = 0$ для всех $v \in M - \{v_1\}$. Очевидно, что $\lambda^*(mx) = mc$.

λ^* есть морфизм $\lambda^* : G^* \to R+$, где G^* - подгруппа группы G, порожденная M. Он может быть расширен до морфизма $\lambda : G \to R^+$ путем определения $\lambda(y) = 1^*(ny)n^{-1}$ для любого $y \in G$, где $ny \in G^*$. Действительно, легко проверить, что $\lambda(y_1 + y_2) = \lambda(y_1) + \lambda(y_2)$, что означает, что λ есть морфизм. Очевидно, что $\lambda(x) = c$.

Теперь доказательство нашей теоремы получить просто. Во-первых, согласно лемме, $\Gamma \vdash x$ влечет $\Gamma \mapsto x$. Докажем противоположное. Пусть $\Gamma \vdash x$ неверно. Тогда $h_0(x) \neq h_0(\varnothing) = e$, и оценка $\mu = \lambda h_0$, где λ - морфизм из алгебраической леммы, дает $\mu(x) = c \neq 1$. Поэтому $\Gamma \mapsto x$ неверно.

Комментарий 4. Как мы видим, то, что физические величины выражаются действительными числами, можно объяснить реальным существованием двух миров SAGUNA и NIRGUNA, противоположных в своих основах. По нашему мнению, это открывает некоторые новые возможности решения проблем физического континуума.

Комментарий 5. Наметим пути возможной формализации физики на базе логики LP. Мы видели, что связки & и $\neg$ соответствуют умножению и инверсии. Поэтому физические соотношения, содержащие эти операции, легко формализуются в LP. В качестве примера возьмем второй закон Ньютона $M^*A^*=F^*$, куда входят масса, ускорение и сила. Этот закон в LP имеет вид $M\&A \Rightarrow F$. Словесно он читается так: "Если наличествует масса и ускорение, то наличествует и сила".

Разумеется, формализация всей физики требует дополнения языка LP дополнительными средствами, разработка которых выходит за рамки статьи.

Литература

1. Malavalli V. On the Western scientific view of the world compared with that coming from India's ancient tradition. // A lecture deliveredat the International PSI-congress. Basel, 1989.

Карпенко А.С.

ШТРИХ ШЕФФЕРА ДЛЯ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ[1]

В 1922 г. Лукасевич построил n+1-значную логическую матрицу $\mathfrak{M}_{n+1}$ со следующими свойствами [5]:

$\mathfrak{M}_{n+1} = \langle M_{n+1}, \sim, \to, \{n\} \rangle$ ($n \geq 2$, $n \in N$), где

$M_{n+1} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$,

$\{n\}$ - множество выделенных значений.

Функции $\sim x$ и $x \to y$ определяются следующим образом:

$$\sim x = n - x,$$

$$x \to y = \min(n, n - x + y).$$

Множество всех суперпозиций функций $\sim x$ и $x \to y$ обозначим посредством L_{n+1}.

МакКинси [6] заменил функциии $\sim x$ и $x \to y$ на единственную функцию $x \to^{E} y$, которая называется штрихом Шеффера для L_{n+1}.

Множество всех суперпозиций функции $x \to^{E} y$ обозначим посредством E_{n+1}. Таким образом, $E_{n+1} = L_{n+1}$.

Пусть P_{n+1} обозначает *функционально полное* множество n+1-значных функций, определенных на множестве M_{n+1}. Множество R_{n+1} назыается *функционально предполным* (в P_{n+1}), если $R_{n+1} \cup \{f\}$ есть P_{n+1}, где $f \notin R_{n+1}$ и $f \in P_{n+1}$. Например, пусть T_{n+1} обозначает множество всех функций из P_{n+1}, которые сохраняют 0 и n, т.е. $f(x_1, \ldots, x_k) \in T_{n+1}$ тогда и только тогда (т.т.т.), когда $f(x_1, \ldots, x_k) \in \{0, n\}$, где $x_i \in \{0, n\}$, $1 \leq i \leq k$.

В [2] С.В.Яблонский доказал теорему о функционально предполных множествах функций в n+1-значной логике для любого $n \geq 2$, откуда следует, что данное множество T_{n+1} является предполным в P_{n+1} для любого $n \geq 2$. В итоге имеет место следующий результат:

Теорема 1. (Д.А.Бочвар,В.К.Финн). *Для любого $n \geq 2$, n есть простое число, т.т.т., когда* $L_{n+1} = T_{n+1}$ [1].

Это свойство L_{n+1} было переоткрыто в [3] и [7].

Пусть функция $x \to^{K} y$ определена следующим образом:

$$x \to^{K} y = \begin{cases} \text{(i)} \quad x, \text{ если } 0<x<y<n, (x,y) \neq 1 \text{ и } (x+y) \leq n \\ \text{(ii)} \quad y, \text{ если } 0<x<y<n, (x,y) \neq 1 \text{ и } (x+y) > n \\ \\ \text{(iii)} \; y, \text{ если } 0<x=y<n \\ \text{(iv)} \quad x \to y \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $(x,y) \neq 1$ обозначает, что x и y не являются взаимнопростыми числами.

Множество всех суперпозиций функций $\sim x$ и $x \to^{K} y$ обозначим посредством K_{n+1}.

Лемма 1. *Для любого n>2, n есть простое число т.т.т., когда $n \in K_{n+1}$.*

Таким образом, формула A (т.е. суперпозиция функций $\sim x$ и $x \to^{K} y$) при всех приписываниях значений принимает выделенное значение n т.т.т., когда n есть нечетное простое число.

Лемма 2. *Для любого n>2 такого, что n есть простое число, $K_{n+1} = L_{n+1}$.*

Доказательство леммы 2.

I. $L_{n+1} \subseteq K_{n+1}$.

(1) $x \to^{1} y = \sim y \to^{K} \sim x$

(2) $x \to^{S} y = x \to^{1} ((y \to^{1} y) \to^{1} \sim y)$

(3) $x \to^{2} y = \sim y \to^{S} \sim x$

(4) $x \to^{3} y = \sim((y \to^{K} x) \to^{K} \sim(y \to^{K} x)) \to^{K} (x \to^{K} y)$.

(5) $x \vee^{1} y = (x \to^{3} y) \to^{3} y$

(6) $x \to y = ((x \to^{K} y) \to^{2} (\sim y \to^{K} \sim x)) \vee^{1} ((\sim y \to^{K} \sim x) \to^{2} (x \to^{K} y)) = \min(n, n-x+y)$.

II. $K_{n+1} \subseteq L_{n+1}$.

Из определения $x \to^{K} y$ следует, что множество K_{n+1} не является функционально полным ни для какого $n \geq 2$. Но выше мы показали (I), что K_{n+1} включает в себя L_{n+1}. Поскольку множество

L_{n+1} функционально предполно для случая, когда n есть простое число [1], то для этого случая $K_{n+1} \subseteq L_{n+1}$. Таким образом, $K_{n+1} = L_{n+1}$.

Из леммы 1, леммы 2 и свойств L_{n+1} следует

Теорема 2. *Для любого $n>2$ n есть простое число т.т.т., когда* $K_{n+1} = L_{n+1}$.

Пусть S_{n+1} обозначает множество всех суперпозиций функции $x \to^s y$ (см. формулу(2)).

Лемма 3. *Для любого $n>2$ такого, что n есть простое число,* $S_{n+1} = K_{n+1}$.

Доказательство.

I. $S_{n+1} \subseteq K_{n+1}$.

См. формулы (1) и (2).

II. $K_{n+1} \subseteq S_{n+1}$.

(7) $\sim x = x \to^s x$

(8) $n = \sim(x \to^s (x \to^s x)) \to^s \sim((x \to^s x) \to^s x)$

(9) $x \to^1 y = x \to^s (n \to^s y)$

(10) $x \to^K y = \sim y \to^1 \sim x$.

Таким образом, для $n>2$ такого, что n есть простое число, функция $x \to^s y$ есть *штрих Шеффера* для K_{n+1}.

Из леммы 3 и леммы 2 следует

Лемма 4. *Для любого $n>2$* такого, что *n есть простое число,* $S_{n+1} = L_{n+1}$.

Из Леммы 4, Леммы 3, Леммы 1 и свойств L_{n+1} следует

Теорема 3. *Для любого $n>2$ n есть простое число т.т.т., когда* $S_{n+1} = L_{n+1}$.

Таким образом, функция $x \to^{S} y$ есть штрих Шеффера для L_{n+1} т.т.т., когда $n>2$ есть простое число.

Из Теоремы 3 и результата Мак-Кинси следует

Теорема 4 *Для любого $n>2$ n есть простое число т.т.т., когда* $S_{n+1} = E_{n+1}$.

Заметим, что непосредственным доказательством $E_{n+1} \subsetneq S_{n+1}$ в Теореме 4 является следующая последовательность формул: (7), (8), (9), (10), (3), (4), (5), (6) и

$$(11)\quad x \to^{E} y = x \to (n \to^{S} y).$$

В заключение подчеркнем, что эквивалентность $S_{n+1} = E_{n+1}$ имеет место не для всего натурального ряда чисел, а лишь для *последовательности простых чисел* в натуральном ряду, и эта эквивалентность по существу выражена равенством (11), правая часть которого представляет собой суперпозицию функции $x \to^{S} y$. Число вхождений функции $x \to^{S} y$ в эту суперпозицию существенно зависит от определения функции $x \to^{K} y$ и, следовательно, от определения понятия простого числа (лемма 1). Так, в определении $x \to^{K} y$ можно отказаться от пункта (i) и от условия $(x+y) > n$ в пункте (ii). Такую функцию обозначим посредством $x \to^{K'} y$. Тогда формула, соответствующая (11), будет чрезвычайно сложной. По крайней мере в [4] посредством $\sim x$ и $x \to^{K'} y$ определена функция Лукасевича $x \to y$ (для любого $n \geq 2$ такого что n есть простое число). Соответствующая формула содержит 21 345 281 вхождение функции $x \to^{K'} y$.

Литература

1. *Бочвар Д.А., Финн В.К.* О многозначных логиках, допускающих формализацию анализа антиномий.1 // Исследования по математической лингвистике, математической логике и информационным языкам. М., 1972. С.238-295.

2. *Яблонский С.В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды математического Института им. В.А.Стеклова. 1958. Т. 51. С.5-142.
3. *Hendry H.E.* Minimally incomplete sets of Lukasiewiczian truth functions // Notre Dame Journal of Formal Logic. 1983. Vol.23. N 1. PP.146-150.
4. *Karpenko A.S.* Characterization of prime numbers in Lukasiewicz's logical matrix // Studia Logica. 1989. Vol.48. N 4. PP.465-478.
5. *Lukasiewicz J., Tarski A.* Investigations into the sentential calculus // Lukasiewicz J. Selected works. Warszawa, 1970. P.131-152.
6. *McKinsey. J.C.C.* On the generation of the functions Cpq and Np of Lukasiewicz and Tarski by means of a single binary operation // Bull. of the Amer. Math. Soc. 1936. Vol.42. PP.849-851.
7. *Urquhart A.* Many-valued logic // Handbook of philosophical logic. Vol.3: Alternatives in classical logic. Dordrecht, 1986.P.71-116.

Карпенко А.С., Павлов С.А.

МАТРИЦЫ ДЛЯ НЕЗАВИСИМОСТИ АКСИОМЫ ТРАНЗИТИВНОСТИ В АКСИОМАТИЗАЦИИ КЛАССИЧЕСКОЙ ИМПЛИКАЦИИ*

В [1] и [3] дана аксиоматизация импликативного фрагмента классической пропозициональной логики:

I. $p \to p$
B. $(q \to r) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
C. $(p \to (q \to r)) \to (q \to (p \to r))$
W. $(p \to (p \to q)) \to (p \to q)$
K_1. $(p \to q) \to (r \to (p \to q))$[1]
X. $(p \to ((q \to q) \to p)) \to (((p \to q) \to q) \to ((q \to p) \to p))$.

Правила вывода: подстановка и modus ponens.

Существенным требованием данной аксиоматизации $TV_{\to}$ является ее независимость. Трудности возникают с доказательством независимости аксиомы B. В указанных работах доказательство независимости B основывается на следующей теореме С.Яськовского [2], формулировку которой приведем здесь полностью: "Пусть S есть система аксиом для пропозиционального исчисления с двумя нормальными правилами вывода и S следующие свойства: 1) закон силлогизма CCpqCCqrCpr есть теорема системы S; 2) константные термины S: определенные унарные или бинарные связки, и более того, символы нольместных высказываний: v для истинного высказывания и f для ложного высказывания. Тогда существуют две аксиомы, принадлежащие S, каждая из которых содержит по крайней мере 9 знаков, или существует аксиома, содержащая по крайней мере 11 знаков". Заметим, что под знаком здесь понимается как пропозициональная переменная, так и логическая связка.

---

* Доложено на семинаре 7 апреля 1994.

[1] В указанных выше работах вместо аксиомы K_1 взята аксиома K'_1: $r \to ((p \to q) \to (p \to q))$ (поскольку исследовались также импликативные фрагменты модальных логик), но в данном случае это не имеет значения.

Поскольку в данной аксиоматизации $TV_{\rightarrow}$ аксиома C эквивалентна I':

$$p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q),$$

то заменив C на I', получаем аксиоматизацию $TV_{\rightarrow}$, которая содержит только одну аксиому, содержащую 11 знаков, а именно B.

Для доказательства теоремы Яськовский использует две матрицы, соответственно 6-элементную и 12-элементную, которыми аксиома B опровергается. В этих матрицах задается дизъюнкция ∨ и отрицание ¬. Импликация определяется обычным образом: ¬x ∨ y. Тогда матрица для импликации выглядит следующим образом:

→	0	1	2	3	4	5
0	5	5	5	5	5	5
1	3	5	5	3	5	5
2	4	5	5	5	4	5
3	1	1	5	5	5	5
4	2	5	2	5	5	5
*5	0	1	2	3	4	5

Эта матрица верифицирует аксиомы I, C, W, K_1, X и фальсифицирует B при следующих значениях: q=2, p=3, r=1.

Однако с помощью компьютерной программы MaGI4, разработанной С.А.Павловым, удалось найти три 4-элементных матрицы, удовлетворяющие указанным свойствам:

→	0	1	2	3
0	3	1	3	3
1	0	3	3	3
2	3	3	3	3
*3	0	1	2	3

→	0	1	2	3
0	3	3	2	3
1	3	3	3	3
2	0	3	3	3
*3	0	1	2	3

→	0	1	2	3
0	3	3	3	3
1	3	3	2	3
2	3	1	3	3
*3	0	1	2	3

Соответственно:

$\nvdash$ B: q=2, p=1, r=0;

$\nvdash$ B: q=1, p=2, r=0;

$\nvdash$ B: q=0, p=2, r=1.

Особый интерес представляет последняя из этих матриц. Она верифицирует также аксиому N: 0 → p. В силу результата М.Вайсберга [4,ch.5] добавление этой аксиомы к произвольной аксиоматизации $TV_{\rightarrow}$ дает полную (full) систему классической пропозициональной логики TV.

Обратим внимание на число бинарных функций в 4-значной логике логике: 4 294 967 296, т.е. это число 4-элементных матриц, определяющих все возможные бинарные функции. И только одна из них (!) фальсифицирует B (сохраняя modus ponens) в полной аксиоматизации TV: I, B, C, W, K_1, X и N.

Литература

1. *Карпенко А.С.* Импликативные логики: решетки и конструкции // Логические исследования. Вып.2. М., 1993. С.224-258.
2. *Jaskowski S.* Trois contributions au calcul des propositions bivalentes // Studia Societatis Scientiarum Torunensis. Section A. 1948. Vol.1. P.1-15. (Английский перевод: Three contributions to the two-valued propositional calculus // Studia Logica. 1975. N 2. P.121-132.
3. *Karpenko A.S.* Construction of classical propositional logic // Bulletin of the Section of Logic. 1993. Vol.22. N 3. P.92-97.
4. *Wajsberg M.* Metalogische Beitrage // Wiadomosci Matematycne. 1937. Vol.43. P.131-168. (Английский перевод: Contribution to metalogic // Wajsberg M. Logical works. Wroclaw, 1977. P.172-200).

Научное издание

Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН

Утверждено к печати Ученым советом Института философии РАН

В авторской редакции
Художник В.К.Кузнецов
Корректор Т.Ф.Латынская

Лицензия ЛР N 020831 от 12.10.93 г.

Подписано в печать с оригинал-макета
12.05.94 г.
Формат 60х84 1/16. Печать офсетная.
Гарнитура Таймс. Печ. л. 7,00. Уч. изд.л. 4,51
Тираж 500 экз, Заказ N 033.

Оригинал-макет подготовлен к печати
в Институте философии РАН
Программист С.А.Павлов

Отпечатано в ЦОН Институте философии РАН
119842, Москва, Волхонка, 14.

Список опубликованных Трудов научно-исследовательского семинара по логике Института философии РАН. Издательство ИФ РАН.
(Руководитель семинара - профессор В.А.Смирнов)

1. Модальные и релевантные логики. М., 1982. - 107 с.

2. Логические исследования. М., 1983. - 123 с.

3. Многозначные, релевантные и пара-непротиворечивые логики. М., 1984. - 133 с.

4. Неклассические логики. М., 1985. - 127 с.

5. Нестандартные семантики неклассических логик. М., 1986.-135 с.

6. Неклассические логики и пропозициональные установки. М., 1987. - 130 с.

7. Неклассические логики и их приложения. М., 1989. - 153 с.

8. Философские основания неклассических логик. М., 1990. - 152 с.

9. Логические методы в компьютерных науках. М., 1991. - 197 с.

Published Proceedings of the Reserch Logical Seminar of Institute of Philosophy, Russian Academy of Sciences

(Head of the Seminar - Professor V.A.Smirnov)

1. Modal and Relevant Logics. Moscow, 1982. - 107 p.

2. Logical Investigations. Moscow, 1983. - 123 p.

3.Many-valued, Relevant and Paraconsistent Logics. Moscow,1984.-133 p.

4. Non-classical Logics. Moscow, 1985. - 127 p.

5. Non-standard Semantics for Non-classical Logics. Moscow,1986.-135 p.

6. Non-classical Logics and Propositional Attitudes. Moscow, 1987.-130 p.

7. Non-classical Logics and its Applications. Moscow, 1989. - 153 p.

8. Philosophical Foundations of Non-classical Logics. Moscow, 1990. - 152 p.

9. Logical Methods in Computer Sciences. Moscow, 1991. - 197 p.